Оптимальное восстановление второй производной

М.П.Овчинцев

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва

Аннотация: В статье показан способ нахождения коэффициентов линейного наилучшего метода приближения второй производной в нуле от ограниченной регулярной функции, заданной в круге по информации о значениях функции и ее производной в заданных точках, образующих правильный многоугольник. В работе также определяется погрешность наилучшего метода и находится соответствующая ей экстремальная функция. Доказывается, что экстремальная функция единственна. В конце работы получены формулы, при помощи которых могут быть вычислены коэффициенты линейного наилучшего метода. При нахождении этих формул применили метод двойственности экстремальных задач, который глубоко разработал С.Я. Хавинсон. Устанавливается, что эти коэффициенты единственны.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, погрешность наилучшего метода, линейный наилучший метод, коэффициенты линейного наилучшего метода.

Введение

В работе [1] К.Ю.Осипенко впервые поставил и решил в общем виде задачу оптимального восстановления значений заданного комплексного линейного функционала на некотором множестве по информации о значениях конечного числа заданных комплексных линейных функционалов на том же множестве. Затем эта тема была развита в совместной работе К.Ю. Осипенко и М.И. Стесина (см. [2]), в совместных работах К.Ю. Осипенко и Г.Г. Магарил-Ильяева (см. [3-4]), в работах Р.Р.Акопяна [5-8], автора настоящей статьи [9-10] и других математиков. В настоящей работе рассматривается еще одна из таких проблем. Мы исследуем задачу оптимального приближения значения второй производной в нуле от регулярной функции, принадлежащей пространству ограниченных регулярных функций, заданных в круге по значениям функции и ее производных в точках, образующих правильный n- угольник. Будет найдена погрешность линейного наилучшего метода и его коэффициенты. В этом случае они (то есть, погрешность и коэффициенты) имеют, как мы увидим, достаточно простой вид. Ранее эту задачу, имеющую такие особенности, не изучали.

Сначала вычислим погрешность наилучшего метода восстановления, применяя для этого соответствующую формулу из работы [1]. Потом выведем формулы, при помощи которых можно вычислять коэффициенты линейного наилучшего метода приближения. Заметим, при доказательстве этих формул мы воспользуемся методом двойственности (см. [11]), который часто применяется при решении экстремальных задач в пространстве ограниченных аналитических функций, заданных в единичном круге.

Напомним теперь некоторые понятия и результаты из работы [1]. Предположим, что $X -$ линейное комплексное пространство и $L, l_1, \ldots, l_n -$ линейные комплексные функционалы, заданные на пространстве X, а W− некоторое множество, лежащее в X. Пусть $S = S(t_1, \ldots, t_n) -$ любая комплексная функция n комплексных переменных. Тогда, погрешностью приближения методом S называется следующая величина

$$r_n(S) = \sup_{x \in W} |L(x) - S(l_1(x), \ldots, l_n(x))|.$$

Наилучшим методом приближения называется функция $S_0 = S_0(t_1, \ldots, t_n)$, для которой выполняется равенство:

$$r_n(S_0) = \inf_S r_n(S).$$

В работе [1] (при некоторых условиях на W) доказано существование линейного наилучшего метода приближения (или восстановления):

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k l_k(x),$$

где коэффициенты $c_k -$ некоторые постоянные числа. В работе [1] установлено:

$$r_n(S_0) = \sup_{\substack{x \in W \\ l_1(x) = .. = l_n(x) = 0}} |L(x)|. \qquad (1)$$

Пусть $K = \{z: |z| < 1\}$ – круг, а $\Gamma = \{z: |z| = 1\}$ – окружность с радиусом, равному одному. Обозначим $B^1(K) = \{f(z): |f(z)| \le 1, z \in K\}$ – множество регулярных функций, заданных в К. Пусть заданы точки, имеющие вид:

$$z_1 = R, z_2 = Re^{\frac{2\pi i}{n}}, \dots, z_n = Re^{\frac{(n-1)2\pi i}{n}}, \qquad (2)$$

где R – постоянное число $(n \ge 3, 0 < R < 1)$. Положим $L(f) = f''(0), l_1(f) = f(z_1), l_2(f) = f'(z_1), \dots, l_{2n-1}(f) = f(z_n), l_{2n}(f) = f'(z_n)$, где $f(z) \in B^1(K)$. В работе [11] было установлено следующее. Если $\omega(\zeta)$ – суммируемая на Γ $(\zeta \in \Gamma)$ функция, то выполняется соотношение:

$$\sup_{f \in B^1(K)} \left| \int_\Gamma f(\zeta)\omega(\zeta)d\zeta \right| = \min_{\varphi \in H_1} \int_\Gamma |\omega(\zeta) - \varphi(\zeta)||d\zeta|, \qquad (3)$$

где H_1 – класс Харди. Экстремальная функция $f^*(z)$ в левой части равенства (3) существует; причем, она единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}, \delta \in R$.

Экстремальная функция $\varphi^*(z)$ в правой части равенства (3), вообще:
говоря, не единственна. Если $\omega(\zeta)$ является граничным значением на границе Γ мероморфной в $\overline{K}$ функции $\omega(z)$ с полюсами $\beta_1, \dots, \beta_m$ (каждый полюс повторен столько раз, какова его кратность), то функция:

$$R(z) = f^*(z)[\omega(z) - \varphi^*(z)] \qquad (4)$$

является аналитической функцией (кроме полюсов) вплоть до границы Γ и имеет в $\overline{K}$

$$s = m - 1 \qquad (5)$$

нулей $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ $(|\alpha_k| \le 1, k = 1, \dots, m-1)$. Далее, в этой работе доказано (см. [11])

$$R(z) = C\frac{\prod_{k=1}^{m-1}(z - \alpha_k)(1 - \overline{\alpha_k}z)}{\prod_{k=1}^{m}(z - \beta_k)\left(1 - \overline{\beta_k}z\right)}, \qquad (6)$$

где C − комплексная константа. Обозначим через:

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} - \qquad (7)$$

произведение Бляшке (в рассматриваемом случае точки $z_1, \dots, z_n$ имеют вид (2)). В работе [10] было доказано, что в этом случае:

$$B(z) = \frac{z^n - R^n}{1 - R^n z^n}. \qquad (8)$$

Несложно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$z_k B'(z_k) = \frac{nR^n}{1 - R^{2n}} \qquad (9)$$

при всех значениях $k = 1, \dots, n$.

Нахождение погрешности наилучшего метода приближения

Лемма 1. Имеет место следующее равенство:

$$\sup_{g(z)\in B^1(K)} |g''(0)| = 2, \qquad (10)$$

а экстремальная функция задачи (10) имеет вид:

$$g^*(z) = e^{i\delta} z^2, \qquad (11)$$

где $\delta \in R$ (δ − постоянное число).

Доказательство. Обозначим:

$$d = \sup_{g\in B^1(K)} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta^3} d\zeta \right|. \qquad (12)$$

Если $g(z) \in B^1(K)$, то:

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta^3} d\zeta \right| \le \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} |d\zeta| = 2.$$

Значит, $d \leq 2$. Так как $z^2 \in B^1(K)$ и $(z^2)'' = 2$, то $d \geq 2$. Следовательно, $d = 2$. Понятно, экстремальная функция задачи (10) имеет вид (11) (см. (12) и введение). Лемма доказана.

Заметим (см. (8)):

$$B(0) = -R^n. \tag{13}$$

Обозначим через:

$$Q(z) = B^2(z). \tag{14}$$

Поскольку:

$$Q'(z) = 2\,B(z)B'(z), \quad Q''(z) = 2\big(B'(z)\big)^2 + 2B(z)B''(z)$$

то (см. (7), (14), (9))

$$Q(z_k) = Q'(z_k) = 0, Q''(z_k) = 2\big(B'(z_k)\big)^2 \neq 0, \tag{15}$$

где $k = 1, \dots, n$.

Обозначим (см. (1)):

$$r_2(0, z_1, \dots, z_n) = \sup_{\substack{f \in B^1(K) \\ f(z_1) = f'(z_1) = \dots, f(z_n) = f'(z_n) = 0}} |f''(0)| - \qquad (16).$$

погрешность наилучшего метода восстановления значений $f''(0)$ по значениям $f(z_1), f'(z_1), \dots, f(z_n), f'(z_n)$, где $f(z) \in B^1(K)$.

Теорема 1. Существует экстремальная функция F(z) задачи (16); причем, она единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}$, $(\delta \in R)$ и имеет вид:

$$F(z) = e^{i\delta} z^2 \left(\frac{z^n - R^n}{1 - R^n z^n}\right)^2, \tag{17}$$

а погрешность наилучшего метода приближения находится по формуле:

$$r_2(0, z_1, \dots, z_n) = 2R^{2n}. \tag{18}$$

Доказательство. Сначала заметим, что:

$$B'(0) = B''(0) = \cdots = B^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (19)$$

В самом деле. Поскольку (см. (8)):

$$B(z) = -\frac{1}{R^n} + \frac{1 - R^{2n}}{R^n(1-(Rz)^n)} = -R^n + \frac{1 - R^{2n}}{R^n}\sum_{k=1}^{\infty}(Rz)^{kn},$$

то отсюда и вытекают равенства (19). Рассмотрим следующее семейство функций

$$A = \{f(z): f(z) \in B^1(K), f(z_1) = f'(z_1) =..= f(z_n) = f'(z_n) = 0\}.$$

Пусть функция $f(z) \in A$. Обозначим:

$$g(z) = \frac{f(z)}{B^2(z)}.$$

Так как при $|z| = 1$

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{B^2(z)}\right| = |f(z)| \leq 1,$$

то $g(z) \in B^1(K)$. Обратно, если $f(z) = B^2(z)g(z)$ и $g(z) \in B^1(K)$, то $f(z) \in A$. Так как $B'(0) = B''(0) = 0$ (см. (19)), то

$$f''(0) = B^2(0)g''(0).$$

Отсюда (см. (13), (10))

$$r_2(0, z_1, \dots, z_n)$$
$$= \sup_{f \in A}|f''(0)|$$
$$= \sup_{g \in B^1(K)}|B^2(0)g''(0)| = R^{2n}\sup_{g \in B^1(K)}|g''(0)| = 2R^{2n}.$$

Понятно, что экстремальная функция F(z) задачи (16) имеет вид (17) (см. (10)).

Нахождение коэффициентов линейного наилучшего метода

Пусть

$$\sum_{k=1}^{n}(c_k f(z_k) + \alpha_k f'(z_k)) -$$

линейный наилучший метод восстановления ($c_k, \alpha_k -$ некоторые постоянные числа). Тогда:

$$\sup_{f \in B^1(K)} \left| f''(0) - \sum_{k=1}^{n} (c_k f(z_k) + \alpha_k f'(z_k)) \right| = r_2(0, z_1, \dots, z_n). \qquad (20)$$

Последнее равенство перепишем в другом виде (см. (18)):

$$\sup_{f \in B^1(K)} \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{2}{\zeta^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\zeta - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(\zeta - z_k)^2} \right) f(\zeta) d\zeta \right| = 4\pi R^{2n}. \qquad (21)$$

Обозначим:

$$\omega(\zeta) = \frac{2}{\zeta^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\zeta - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(\zeta - z_k)^2}. \qquad (22)$$

Заметим, функция F(z) является экстремальной функцией задачи (20) (см. (17)). А, значит, и задачи (21). Так как экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (21) единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}, \delta \in R$, то $f^*(z)$ имеет вид:

$$f^*(z) = e^{i\delta} F(z), \qquad (23)$$

Теорема 2. Коэффициенты линейного наилучшего метода приближения единственны и находятся по формуле:

$$\alpha_k = -\frac{2(1 - R^{2n})^2}{n^2 z_k}, \qquad (24)$$

$$c_k = 2\frac{1 - R^{2n}}{z_k^2 n^2} (R^{2n}(n-2) + n + 2), \qquad (25)$$

где $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Функция (см. (4), (22), (23)):

$$R(z) = e^{i\delta} z^2 B^2(z) \left[\frac{2}{z^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(z - z_k)^2} - \varphi^*(z) \right]$$

имеет единственный полюс в точке $z=0$ и она не равняется нулю в замкнутом круге $\overline{K}$ (см. (5), (7)); $\varphi^*(z)$ – экстремальная функция в правой части равенства (3) при соответствующей функции $\omega(\zeta)$ вида (22). Отсюда вытекает, что (см. (6), (23), (17))

$$z^2B^2(z)\left(\frac{2}{z^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z-z_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(z-z_k)^2}-\varphi^*(z)\right)=\frac{C}{z},$$

где C – постоянное число. Так как:

$$C=B^2(z)\left[2-z^3\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z-z_k}-z^3\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(z-z_k)^2}-z^3\varphi^*(z)\right],$$

то (см. (13))

$$C=\lim_{z\to 0}B^2(z)\left[2-z^3\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z-z_k}-z^3\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(z-z_k)^2}-z^3\varphi^*(z)\right]=$$

$$=2B^2(0)=2R^{2n}.$$

Поэтому:

$$\frac{2}{z^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z-z_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(z-z_k)^2}-\varphi^*(z)=\frac{2R^{2n}}{z^3B^2(z)}. \qquad (26)$$

Легко убедиться в том, что (см. (8), (9)):

$$B^2(z)=\left(B'(z_k)\right)^2(z-z_k)^2P_k(z); \qquad (27)$$

причем $P_k(z_k)=1$ и $P_k(z)$ – аналитическая функция, заданная в некоторой окрестности точки z_k, лежащей в единичном круге K.

Отсюда (см. (26), (9), (27)):

$$-\alpha_k=2R^{2n}\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)^2}{z^3B^2(z)}=2R^{2n}\lim_{z\to z_k}\frac{1}{z^3\left(B'(z_k)\right)^2P_k(z)}=$$

$$=\frac{2R^{2n}}{z_k(z_kB'(z_k))^2}=\frac{2R^{2n}}{z_k\left(\frac{nR^n}{1-R^{2n}}\right)^2}=\frac{2(1-R^{2n})^2}{n^2z_k}.$$

Значит, мы убедились в справедливости равенств (24). Теперь найдем коэффициенты c_k. Сначала рассмотрим следующие

Функции:

$$\psi_k(z)=\frac{z^n-R^n}{z-z_k}=z^{n-1}+z^{n-2}z_k+\dots+z_k^{n-1}, \tag{28}$$

где $k=1,\dots,n$. Вычислим $\psi_k(z_k)$ и $\psi_k'(z_k)$. Поскольку:

$$(z-z_k)\psi_k(z)=z^n-R^n,$$

То:

$$\psi_k(z)+(z-z_k)\psi_k'(z)=nz^{n-1},$$

$$2\psi_k'(z)+(z-z_k)\psi_k''(z)=n(n-1)z^{n-2}.$$

Отсюда следует, что:

$$\psi_k(z_k)=nz_k^{n-1}=\frac{nz_k^n}{z_k}=\frac{nR^n}{z_k}. \tag{29}$$

(формула (29) непосредственно вытекает из формулы (28)), а

$$\psi_k'(z_k)=\frac{n(n-1)R^n}{2z_k^2}. \tag{30}$$

Поэтому см. ((26), (28), (30)):

$$-c_k=2R^{2n}\lim_{z\to z_k}\left(\frac{(z-z_k)^2}{z^3\,B^2(z)}\right)'=2R^{2n}\lim_{z\to z_k}\left(\frac{(z-z_k)^2(1-R^nz^n)^2}{z^3\,(z-z_k)^2\psi_k^2(z)}\right)'=$$

$$=2R^{2n}\lim_{z\to z_k}\left(\frac{(1-R^nz^n)^2}{z^3\,\psi_k^2(z)}\right)'=2R^{2n}\lim_{z\to z_k}\left(\frac{(1-R^nz^n)^2}{z^3\psi_k^2(z)}\right)\left(Ln\frac{(1-R^nz^n)^2}{z^3\psi_k^2(z)}\right)'=$$

$$=2R^{2n}\frac{(1-R^{2n})^2}{z_kn^2R^{2n}}\left(\frac{-2\frac{R^{2n}n}{z_k}}{1-R^{2n}}-2\frac{\psi_k'(z_k)}{\psi_k(z_k)}-\frac{3}{z_k}\right)=$$

$$= -2\frac{(1-R^{2n})^2}{z_k^2 n^2}\left(\frac{2R^{2n}n}{1-R^{2n}} + \frac{n(n-1)R^n}{nR^n} + 3\right) =$$

$$= -2\frac{(1-R^{2n})^2}{z_k^2 n^2}\left(\frac{2R^{2n}n}{1-R^{2n}} - \frac{1}{n} + 4\right) =$$

$$= -2\frac{1-R^{2n}}{z_k^2 n^2}\left(R^{2n}(n-2) + n + 2\right).$$

А это и означает, что мы убедились в справедливости формул (25). Понятно, что коэффициенты c_k и $\alpha_k -$ единственны при всех значениях $k = 1, \dots, n$.Теорема доказана.

Результаты

Итак, мы решили поставленную задачу: нашли погрешность наилучшего метода приближения, а также формулы, при помощи которых можно вычислять рассматриваемые коэффициенты. Эти формулы имеют довольно простой вид.

Заключение

Мы исследовали поставленную задачу в пространстве ограниченных аналитических функций, заданных в единичном круге. Было бы интересно развивать эту тему и решить похожую задачу в случае, когда производные имеют более высокий порядок, а также изучить подобные задачи в пространстве Харди H_p ($1 \leq p < \infty$).

.

Литература

1. Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 1. С. 29-40.

2. Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана. Матем. заметки, 49:4,(1991), с. 95-104.

3. Magaril-Il′yaev G. G., Osipenko K.Yu.. On the best methods for recovering derivatives in Sobolev classes, Izv. Math., 78:6(2014), pp. 1138-1157.

4. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру, Труды МИАН, 293(2016), с. 201-216.

5. Akopyan O.V., Akopyan R.R. Optimal recovery on classes of functions analytic in a annulus // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 321, suppl. 1 (2023), pp. 4 - 19.

6. Akopyan R. R., Optimal Recovery of a Derivative of an Analytic Function from Values of the Function Given with an Error on a Part of the Boundary. II. Analysis Math., 2020, Vol. 46:3 pp. 409–424.

7. Акопян О.В., Акопян Р.Р. Оптимальное восстановление на классах аналитических в кольце функций, Тр. ИММ УрО РАН, 29, 2023, № 1, с. 7-23.

8. Акопян Р.Р.. Наилучшее приближение операторов дифференцирования на классе Соболева аналитических в полосе функций, Сиб. электрон. матем. изв., 18:2(2021), с. 1286-1298.

9. Ovchintsev M.P. Optimal recovery of derivatives of Hardy class functions. E3S Web of Conferences, 2019, 110, 01043.

10. Овчинцев М.П. К вопросу об оптимальном восстановлении ограниченной аналитической функции // Научно-технический вестник Поволжья, № 10, 2023 г. С. 246-250.

11. Хавинсон С.Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различные обобщения. – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1981 г., - 92 с.

References

1. Osipenko K.Yu. Matem. zametki. 1976. Vol. 19. No. 1. pp. 29-40.

2. Osipenko K.Yu., Stesin M.I. Matem. zametki, 49:4,(1991), pp. 95-104.

3. Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu.. Izv. Math., 78:6(2014), pp. 1138-1157.

4. Magaril-Il’yaev G.G., Osipenko K.Yu. Proceedings of the MIAN, 293(2016), pp. 201-216.

5. Akopyan O.V., Akopyan R.R. Proc. Steklov Inst. Math., 2023, (Suppl.), 321, suppl. 1, pp. 4-19.

6. Akopyan R.R. Analysis Math., 2020, No. 46:3,pp. 409–424.

7. Akopyan O.V., Akopyan R.R., Tr. IMM UrO RAS, 2023 29, № 1, pp. 7-23.

8. Akopyan R.R., Sib. electron. math. izv., 18:2(2021), pp. 1286-1298.

9. Ovchintsev M.P., E3S Web of Conferences, 2019, 01043 (2019).

10. Ovchintsev M.P., Nauchno-tekhnicheskij vestnik Povolzh'ya, 2023, № 10, pp. 246-250.

11. Khavinson S.Ya., Osnovy` teorii e`kstremal`ny`x zadach dlya ogranichenny`x analiticheskix funkcij i ix razlichny`e obobshheniya [Fundamentals of the theory of extremal problems for bounded analytic functions and their various generalizations], MISI im. V.V. Kujbysheva, 1981, Moskva, 92 p.

Дата поступления: 5.11.2024

Дата публикации: 15.12.2024