Инженерный вестник Дона, №1 (2019)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5516

Равновесие Штакельберга в модели согласования частных и общественных интересов

Э.В. Кораблина, А.Б. Усов

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В работе рассмотрена стационарная модель согласования частных и общественных интересов при распределении ресурсов. Исследование проводится в игровой постановке с учетом иерархии в отношениях между субъектами. Учитываются субъекты управления двух уровней: супервайзер и агенты. Между агентами возникает неантагонистическая игра, в которой строится равновесие Нэша. При моделировании взаимодействия супервайзера и агентов строится равновесие Штакельберга. Указаны алгоритмы решения задачи, проведены имитационные эксперименты для ряда характерных входных данных. Дан анализ полученных результатов.

Ключевые слова: супервайзер, агент, равновесие Нэша, иерархическая система, равновесие Штакельберга, субъект управления, частные интересы, общественные интересы.

Введение

Задача согласования частных и общественных интересов встает при моделировании любой современной системы управления. Все системы управления имеют иерархическую структуру. Имеется один субъект управления верхнего уровня (супервайзер) и несколько субъектов нижнего уровня (агентов). Отношения между субъектами управления разных уровней строятся на основе иерархии в соответствии с некоторым информационным регламентом (игра Штакельберга с обратной связью по управлении или без нее). При этом все субъекты управления имеют свои частные цели, которые, как правило, не совпадают с общесистемными целями. Возникает необходимость в согласовании частных и общественных интересов.

1. Постановка задачи

Пусть имеется один супервайзер и N агентов. Супервайзер распределяет некоторый ресурс (r_i, $i \in N$) между агентами. Агенты могут тратить полученный от супервайзера ресурс как на личные цели, так и на увеличение общественного блага.

Целевые функции субъектов имеют вид:

- супервайзера

$$Y_0 = \left(1 - \sum_{i \in N} \alpha_i\right) c(q) \to \max_{\alpha_i} \qquad (1)$$

- агентов

$$Y_i - \alpha_i c(q) + Q(r_i - p_i) \to \max_{p_i} \qquad (2)$$

где $q = \sum_{i \in N} p_i$

Ограничения на управления агентов имеют вид:

$$0 \le p_i \le r_i, i = \overline{1, N} \quad (3)$$

В распоряжении i - ого агента имеется ресурс в размере r_i; параметр p_i ($0 \le p_i \le r_i$) определяет часть ресурса r_i, которая расходуется на общественные нужды (увеличивает общественное благо). Прибыль, получаемая i -м агентом задаётся его целевой функцией Y_i, где первое слагаемое $\alpha_i c(q)$ выражает вклад i - ого агента в общественное благо, второе слагаемое $Q(r_i - p_i)$ - размер его дохода от частной деятельности. Прибыль, получаемая супервайзером, при активном ($p_i > 0$) или пассивном ($p_i = 0$) участии каждого из агентов выражается его целевой функцией Y_0. В целевых функциях параметр α_i отвечает за долю, которую агенты получают в виде вознаграждения из общественного блага.

2. Построение равновесия Нэша

Начнём рассмотрение игры (1) - (3) с точки зрения агентов, при этом постановка задачи такова: каждый агент стремится максимизировать свой выигрыш. Для нахождения оптимальных значений p_i воспользуемся равновесием Нэша.

Пусть:

$$Q(r_i - p_i) = (r_i - p_i)^{\beta_i}, 0 < \beta_i < 1$$

$$Q'(r_i - p_i) > 0 \; \forall r_i, p_i \qquad (4)$$

$$c'(q) > 0 \; \forall q$$

Алгоритм решения задачи (1)-(3) с ограничениями (4) состоит в следующем:

1) Функцию выигрыша каждого участника Y_i продифференцируем по его управлению p_i: $Y_i \dfrac{\partial Y_i}{\partial p_i} = \dfrac{\alpha_i \beta_i}{(p_1 + \dots + p_j)^{1-\beta_i}} - \dfrac{\beta_i}{(r_i - p_i)^{1-\beta_i}}$

2) Полученное выражение приравняем к 0. Получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения p_i:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{{\alpha_1}^{\beta_1 - 1} r_1 - \sum_{i=2}^{N} p_i}{{\alpha_1}^{\beta_1 - 1} + 1} \\ \dots \\ p_N = \dfrac{{\alpha_N}^{\beta_N - 1} r_N - \sum_{i=1}^{N-1} p_i}{{\alpha_N}^{\beta_N - 1} + 1} \end{cases}$$

3) Найдём, при каких значениях параметров r_i, α_i найденные в предыдущем пункте точки являются оптимальными.

4) Равновесное множество имеет следующий вид:

$$NE = \{p_i\}_{i=1}^{N} = \left\{ \frac{{\alpha_i}^{1-\beta_i} r_i - \sum_{j \in N / i} p_j}{{\alpha_i}^{1-\beta_i} + 1} \right\}_{i=1}^{N}$$

Пример 1:

Пусть $N = 2$, тогда

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{{\alpha_1}^{\beta_1 - 1} r_1 - p_2}{{\alpha_1}^{\beta_1 - 1} + 1} \\ p_2 = \dfrac{{\alpha_2}^{1-\beta_2} r_2 - p_1}{{\alpha_2}^{1-\beta_2} + 1} \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{{\alpha_2}^{\beta_2 - 1}\left(r_1\, {\alpha_1}^{\beta_1 - 1} - r_2\right) + \, {\alpha_1}^{\beta_1 - 1} r_1}{\left({\alpha_1}^{\beta_1 - 1} + 1\right)\left({\alpha_2}^{\beta_2 - 1} + 1\right) - 1}$$

$$p_2 = \frac{{\alpha_2}^{\beta_2 - 1} r_1}{{\alpha_2}^{\beta_2 - 1} + 1} - \frac{{\alpha_2}^{\beta_2 - 1}\left(r_1\, {\alpha_1}^{\beta_1 - 1} - r_2\right) + \, {\alpha_1}^{\beta_1 - 1} r_1}{\left(\left({\alpha_1}^{\beta_1 - 1} + 1\right)\left({\alpha_2}^{\beta_2 - 1} + 1\right) - 1\right)\left({\alpha_2}^{\beta_2 - 1} + 1\right)}$$

Найдём ограничения, при которых указанные точки являются оптимальными, положим $F_1(x) = \frac{\partial^2 Y_1}{(\partial p_1)^2}$ и $F_2(x) = \frac{\partial^2 Y_2}{(\partial p_2)^2}$:

$$F_1(x) < 0, \text{при } p_1 < \frac{r_2\left(-{\alpha_2}^{(1-\beta_2)(2-\beta_1)}\right)^{\beta_1 - 2} - r_1\left(\alpha_1\left(1 + {\alpha_2}^{1-\beta_2}\right)\right)^{2-\beta_1}}{{\alpha_2}^{(1-\beta_2)(2-\beta_1)(\beta_1 - 2)} - \left(\alpha_1\left(1 + {\alpha_2}^{1-\beta_2}\right)\right)^{2-\beta_1}}$$

$$F_2(x) < 0, \text{при } p_2 < \frac{r_1\left(-{\alpha_1}^{(1-\beta_1)(2-\beta_2)}\right)^{\beta_2 - 2} - r_2\left(\alpha_2\left(1 + {\alpha_1}^{1-\beta_1}\right)\right)^{2-\beta_2}}{{\alpha_1}^{(1-\beta_1)(2-\beta_2)(\beta_2 - 2)} - \left(\alpha_2\left(1 + {\alpha_1}^{1-\beta_1}\right)\right)^{2-\beta_2}}$$

Таким образом, при $F_1(x) < 0$ и $F_2(x) < 0$ равновесие Нэша имеет вид:

$$NE = \left\{\frac{{\alpha_1}^{\beta_1 - 1} r_1 - p_2}{1 + {\alpha_1}^{\beta_1 - 1}}; \frac{{\alpha_2}^{\beta_2 - 1} r_2 - p_1}{1 + {\alpha_2}^{\beta_2 - 1}}\right\}$$

3. Построение равновесия Штакельберга

Теперь рассмотрим игру (1)-(3) со стороны взаимодействия агентов с супервайзером. Максимизация функции Y_0 идёт по параметру α_i, т. е. максимум супервайзера зависит от долей, которые получают агенты из общественного блага. Для нахождения оптимальных значений и построения равновесия воспользуемся теоретико-игровым подходом Штакельберга.

Алгоритм поиска равновесия Штакельберга для системы (1)-(3) с ограничениями (4) состоит в следующем:

1. Первые три шага повторяем из алгоритма поиска равновесия Нэша.
2. Получаем точки p_i, $i = 1,2,\ldots,N$ и условие их оптимальности.
3. Перебираем элементы множества значений параметров α_i, $i = 1,\ldots,N$, подставляем их в Y_0 и ищем максимум данной функции.
4. Точки p_i с параметрами α_i, на которых достигается максимум и образуют искомое равновесие.

Аналитически решить поставленную задачу в общем виде не удаётся, поэтому задача решается методом имитационного моделирования.

Пример 1:

В случае $N = 2$ часть проведенных имитационных экспериментов приведена в таблице 1:

Таблица 1.

Результаты имитационных экспериментов

α_1	α_2	β	r_1	r_2	**Результат**		Y_0
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0.5	1.01	0.73	$p_1 = 0$	$p_2 = 0.924$	0,24
		0.33333	1.01	0.6			0,243
		0.25	1.02	0.5			0,245

Заключение

В результате исследования предложенной модели согласования частных и общественных интересов при распределении ресурса были построены равновесия Нэша и Штакельберга. Задача решалась аналитически и путем имитации. Равновесие Нэша позволило определить оптимальные доли ресурсов, затрачиваемые каждый агентом на общественные нужды. Основываясь на полученных данных, было построено равновесие Штакельберга, позволяющее супервайзеру контролировать доли ресурса, которые расходуют агенты на максимизацию как собственной прибыли, так и общественного дохода.

В дальнейшем планируется рассмотрение динамической модели и применение для решения задачи метода качественно репрезентативных сценариев.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект 17-19-01038.

Литература

1. Усов А.Б. Иерархически организованные системы управления. 2008, С. 7-9
2. Горбанёва О.И., Угольницкий Г.А. Статические модели согласования общественных и частных интересов при распределении ресурсов. 2016, С. 31-37.
3. Угольницкий Г.А, Усов А.Б. Динамические иерархические игры двух лиц в программных стратегиях и их приложения. МТИП. 2013. том 5, выпуск 2, С. 82–104.
4. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. МАКС-Пресс, 2005, С. 68-75, 91-103,134-145

5. Астанин С.В., Жуковская Н.К. Внутрифирменные механизмы распределения ограниченных ресурсов на основе переговорного процесса. Лаборатория системы поддержки принятия решений №2(38) 2012, С. 1-7.
6. Коковин С.Г. Лекции по теории игр и политологии. 2003, С. 17-25.
7. Basar T., Olsder G.J. Dynamic Noncooperative Game Theory. - SIAM: Philadelphia, 1999. – 511 p.
8. Algorithmic Game Theory / Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. Cambridge University Press, 2007, 754 p.
9. Жуковская Н.К. Согласование интересов в иерархических системах // Инженерный вестник Дона, 2011, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/584.
10. Магдесян В.А., Усов А.Б. Информационно-аналитическая система управления взаимодействием центрального и коммерческого банков // Инженерный вестник Дона, 2017, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2017/4376.

References

1. Usov A.B. Ierarhicheski organizovannye sistemy upravleniya [Hierarchically-organized control system]. 2008, pp. 7-9.
2. Gorbanyova O.I., Ugol'nickij G.A. Staticheskie modeli soglasovaniya obshchestvennyh I chastnyh interesov pri raspredelenii resursov.[Static models of coordination of public and private interests in the allocation of resources] 2016, pp. 31-37
3. Ugol'nickij G.A, Usov A.B. Dinamicheskie ierarhicheskie igry dvuh lic v programmnyh strategiyah I ih prilozheniya. [Dynamic hierarchical games of two persons in program strategies and their applications]MTIP. 2013. tom 5, vypusk 2, pp. 82–104.

4. Vasin A.A., Morozov V.V. Teoriya igr I modeli matematichesko jehkonomiki.[Game theory and mathematical Economics models] MAKS-Press, 2005,pp. 68-75, 91-103,134-145
5. Astanin S.V., ZHukovskaya N.K. Laboratoriya sistemy podderzhki prinyatiya reshenij, №2 (38) 2012, pp. 1-7.
6. Kokovin S.G. Lekcii po teorii igr I politologii.[Lectures on game theory and political science] 2003, pp. 17-25
7. Basar T., Olsder G.J. Dynamic Noncooperative Game Theory. SIAM: Philadelphia, 1999. 511 pp.
8. Algorithmic Game Theory. Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. Cambridge University Press, 2007, 754 p.
9. ZHukovskaya N.K. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2011, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/584.
10. Magdesyan V.A., Usov A.B. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017, № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2017/4376.