Зависимость текущего такта измерения от структурных свойств сигнала при адаптивной временной дискретизации интерполяционного типа

Г.И. Ткаченко[1], М.Г. Ткаченко[2]

[1]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
[2]ООО НПКФ «Медиком МТД», Таганрог

Аннотация: Эффективность алгоритмов адаптивной временной дискретизации (АВД) определяется сжимаемостью аналогового сигнала. В целях априорной оценки сжимаемости измерительных сигналов рассматривается зависимость текущего такта измерения при АВД от динамических свойств сигнала. В зависимости от априори известных характеристик динамических свойств сигналов и заданной погрешности аппроксимации выбирают способ интерполяции или экстраполяции. В статье получена зависимость текущего такта измерения от дифференциальных свойств сигнала для идеального алгоритма АВД интерполяционного типа. Предполагается восстановление сигнала после АВД интерполяционным полиномом Лагранжа n-ой степени. Качество аппроксимации устанавливается критерием равномерного приближения. Показано, что анализ идеальной АВД интерполяционного типа сводится к анализу эквивалентной по величине участка аппроксимации идеальной АВД экстраполяционного типа.
Ключевые слова: Адаптивная временная дискретизация, такт измерения, структурные свойства сигнала, интерполяция, погрешность воспроизведения.

Одним из методов сокращения измерительной информации на этапе аналого-цифрового преобразования аналоговых сигналов является адаптивная временная дискретизация (АВД) [1–4]. Эффективность применения алгоритмов АВД по сравнению с равномерной временной дискретизацией (РВД) [3, 5] в цифровых информационно-измерительных системах определяется коэффициентом сокращения числа отсчетов (сжатия), который зависит как от вида аппроксимации и критерия приближения, так и от динамических свойств аналогового сигнала измерительной информации. При выбранном способе аппроксимации величина сжатия посредством АВД в основном зависит от сжимаемости сигнала, т.е. от его способности как материала к сжатию.

Для теоретической оценки сжимаемости аналоговых сигналов прежде всего требуется определять [5, 6] зависимость текущего такта измерения τ при идеальной в смысле качества воспроизведения АВД от динамических свойств сигнала. Под идеальной АВД понимается дискретизация, реализуемая идеальным устройством, которое не имеет инструментальных погрешностей и обеспечивает неограниченный набор возможных тактов измерения τ $(0 \le \tau \le \infty)$.

Рассмотрим решение этой задачи при следующих условиях. Восстановление сигнала после АВД производится интерполяционным полиномом n -ой степени. Качество воспроизведения (аппроксимации) устанавливается согласно критерию равномерного приближения [3].

Чтобы математически найти величину τ необходимо, во-первых, выбрать, конкретизируя класс функций, математическую модель сигнала и, во-вторых, наложить соответствующие ограничения на величину допустимой погрешности воспроизведения δ_0.

В качестве математической модели сигнала [7, 8, 9] целесообразно принять аналитическую функцию $x(t), t \in [0, t_m]$. Эта полная, контурная модель является определенной идеализацией реальных сигналов. Однако она позволяет достаточно хорошо их описать на каждом ограниченном интервале $[t_{i-1}, t_i] \in [0, t_m]$ оценочной функцией $x^*(t), t \in [t_{i-1}, t_i]$ в виде степенного алгебраического полинома.

В отличие от допущения, принятого в [6], будем полагать, что величина модуля допустимой погрешности воспроизведения δ_0 ограничена менее жестким условием. Пусть она принадлежит области Δ_1 таких значений, при которых на каждом участке аппроксимации длительности Δt производная сигнала *(n+2)*-го порядка $x^{(n+2)}(t) \cong const, t \in [t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t]$ или, вводя новую переменную $t' = t - t_{i-1}$, в другой форме $x^{(n+2)}(t_{i-1} + t') \cong const, t' \in [0, \Delta t]$ (сокращенно $t' \in \Delta t$). Для принятого ограничения на величину $\delta_0 \in \Delta_1$ правомерно считать, что на каждом участке аппроксимации сигнал достаточно точно описывается полиномом *(n+2)*-го порядка.

Рассмотрим теперь определение величины текущего такта измерения для идеального в смысле качества алгоритма АВД интерполяционного типа, ориентированного на воспроизведение сигнала интерполяционным полиномом Лагранжа n -ой степени по равноотстоящим отсчетам на интервале интерполяции, величина которого при заданном n определяет величину такта измерения:

$$\tau = \Delta t / n \ \text{при}\ n \geq 1 \ \text{и}\ \tau = \Delta t \ \text{при}\ n = 0 . \tag{1}$$

Известно [7, 8] , что при интерполяции функции $x(t')$ полиномом Лагранжа $L_n(t')$при равноотстоящих узлах интерполяции погрешность аппроксимации $\delta(t')$ определяется остаточным членом $R_{n+1}(t')$ интерполяционного полинома Ньютона в форме Коши:

$$\delta(t_{i-1} + t') = R_{n+1}(t_{i-1} + t') = \frac{x^{(n+1)}(\eta) \cdot \tau^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=0}^{n} (u-k) \tag{2}$$

где η − некоторая точка, зависящая от t_{i-1}, t' и n ($t_{i-1} \prec \eta \prec t_{i-1} + t'$); u − безразмерный коэффициент, u = t'/τ . Однако использовать (2) для точного определения величины такта измерения τ (а, следовательно, и связанного с ним соотношением (1) участка аппроксимации Δt) практически невозможно, так как неизвестны как момент времени t'_*, при котором $\delta(t'_*) = \delta_m = \pm\delta_0$, так и положение точки η на интервале $[t_{i-1}, t'_* + t_{i-1}]$.

Приближенное решение, дающее оценку снизу величины такта измерения τ, может быть получено из оценки сверху остаточного члена (2) [7, 10]

$$|\delta_m| = \delta_0 = \left| \underbrace{R_{n+1}(t')}_{t' \in \Delta t} \right| \leq \frac{M_{n+1} \cdot \tau^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{k=0}^{n} (u-k) \right|_{max} , \tag{3}$$

где M_{n+1} – модуль-максимум *(n+1)*-ой производной в рассматриваемом интервале интерполяции, $M_{n+1} = max\left|x^{(n+1)}(t')\right| = \left|x^{(n+1)}(\xi)\right|, t' u \xi \in \Delta t$; ξ – некоторая точка интервала интерполяции. Как правило, модуль-максимум *(n+1)*-ой производной неизвестен, так как неизвестно положение точки ξ на интервале $[t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t]$, а попытка определения ее положения приводит к неразрешимой в общем виде задаче. Требовать же априорного знания локальных свойств сигнала в виде $\left|x^{(n+1)}(\xi)\right|, \xi \in \Delta t$ для каждого возможного такта измерения τ практически нереально. Поэтому при разумных требованиях к характеру априорной информации и принятых ограничениях для погрешности δ_0 невозможно оценить такт измерения на основании предельного случая неравенства (3).

Рациональную с точки зрения характера априорных данных и принятого ограничения на погрешность $\delta_0 \in \Delta_1$ оценку величины τ можно найти, если вместо M_{n+1} рассматривать среднее значение *(n +1)*-ой производной на интервале аппроксимации,

$$x_{cp}^{(n+1)}(\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} x^{(n+1)}(t')dt'. \tag{4}$$

Тогда для оценки величины τ вместо (3) можно использовать приближенное равенство:

$$\delta_0 \cong \frac{\left|x_{cp}^{(n+1)}(\Delta t)\right|}{(n+1)!} \cdot a_n \tau^{n+1}, \text{ где } a_n = \left|\prod_{k=0}^{n}(u-k)\right|_{max}. \tag{5}$$

В то время как неравенство (3) дает заведомо заниженную оценку действительной величины такта измерения τ, приближенное равенство (5) может давать как заниженную, так и завышенную оценку. Однако при этом оценка такта по (5) всегда будет ближе к истинной величине такта измерения, поскольку замена M_{n+1} на $x_{cp}^{(n+1)}(\Delta t)$ ослабляет неравенство (3). В этом легко убедиться путем рассмотрения ряда конкретных примеров при фиксированном n и Δt (или τ).

Обе оценки с уменьшением допустимой погрешности воспроизведения δ_0 сходятся к истинной величине такта измерения τ. Если еще учесть, что оценка сжимаемости измерительных сигналов связана с операцией осреднения, при которой сглаживается разброс оценок такта измерения по (5) для каждого интервала аппроксимации, то дальнейшее применение приближенного равенства (5) можно считать допустимым.

Разлагая функцию $x^{(n+1)}(t')$ в ряд Маклорена при сделанных ограничениях на величину δ_0, представим (5), учитывая (4) и (1), в виде двух уравнений:

$$x_н^{(2)}\tau^2 + 2\cdot x_н^{(1)}\tau - 2\delta_0/a_0 = 0 \quad при\ \ n=0, \delta_m \succ 0;$$
$$n\cdot x_н^{(n+2)}\tau^{n+2} + 2\cdot x_н^{(n+1)}\tau^{n+1} - 2\delta_0(n+1)!/a_n = 0 \quad при\, n \ge 1, \delta_m \succ 0. \qquad (6\ а)$$
$$x_н^{(2)}\tau^2 + 2\cdot x_н^{(1)}\tau + 2\delta_0/a_0 = 0 \quad при\ \ n=0, \delta_m \prec 0;$$
$$n\cdot x_н^{(n+2)}\tau^{n+2} + 2\cdot x_н^{(n+1)}\tau^{n+1} + 2\delta_0(n+1)!/a_n = 0 \quad при\, n \ge 1, \delta_m \prec 0, \qquad (6\ б)$$

где a_n – коэффициент, зависящий от степени полинома, например, как показано в таблице № 1:

Таблица № 1.

Величина коэффициентов в зависимости от степени полинома

n	0	1	2	3	4
a_n	1/2	1/4	$2\sqrt{3}/9$	1	3,6

Уравнениям (6 а, б) соответствует эквивалентная функция погрешности аппроксимации:

$$\delta'(t'') = x_н^{(n+1)}\cdot\frac{a_n(t'')^{(n+1)}}{(n+1)!} + x_н^{(n+2)}\cdot\frac{na_n(t'')^{(n+2)}}{2(n+1)!}, t'' \in \tau\ (t'' = t/n, n \ge 1).$$

Функция $\delta'(t'')$ не равна истинной погрешности аппроксимации, но эквивалентна ей в том смысле, что удовлетворяет приближенному равенству $\delta'(\tau) = \delta(t'_*) = \delta_m = \pm\delta_0$, где $t'_* \in \Delta t$ – момент времени, при котором $\delta(t')$

принимает максимальное значение δ_m и который невозможно определить аналитически. Тем самым анализ идеальной АВД интерполяционного типа сводится к анализу эквивалентной по величине участка аппроксимации Δt идеальной АВД экстраполяционного типа.

Решение уравнений (6 а, б) дает зависимость текущего такта измерения $\tau = \psi_и(\delta_0, x_н^{(n+1)}, x_н^{(n+2)})$ от дифференциальных свойств сигнала для идеального алгоритма АВД интерполяционного типа.

Таким образом, на основании уравнений (6 а, б) можно найти функциональную зависимость $\psi_{и1}$ текущего такта измерения $\tau(t)$ от структурных свойств сигнала для случая интерполяции полиномами Лагранжа. Полученные соотношения позволяют также оценивать сжимаемость случайных сигналов, полагая функцию *x(t)* реализацией дифференцируемого случайного процесса *X(t)*.

Литература

1. Адаптивные телеизмерительные системы / Авдеев Б.Я., Антонюк Е.М., Долинов С.Н., Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Фремке А.В., Под ред. Фремке А.В. Л.: Энерго-издат. Ленингр. отд-ние, 1981. 248 с.

2. Куревин В.В., Морозов О.Г., Морозов Г.А. и др. Новые интегральные решения для разработки сборщиков энергии из окружающей среды. // Инженерный вестник Дона. 2016. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_79_Sinyutin.pdf_e8c1c28197.pdf.

3. Нгуен Суан Мань, Попов Г.А. Система сбора данных по параметрам конструкций интеллектуального здания на основе волоконно-оптических датчиков. // Инженерный вестник Дона. 2015. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_53_Nguyen.pdf_29bf05efed.pdf.

4. Кавчук С.В. Зависимость текущего такта измерения при адаптивной временной дискретизации экстраполяционного типа от структурных свойств сигнала. // Инженерный вестник Дона. 2016. №4. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_173_kavchuk.pdf_c921d62655.pdf.

5. Qaisar, S.M., L.L. Fesquet and M.R. Laurent, 2009. Adaptive Rate Sampling and Filtering Based on Level Crossing Sampling. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2009(10.1155/2009/971656), 160 p.

6. Кавчук С.В., Ткаченко Г.И., Ткаченко М.Г. Оценка сжимаемости измерительных сигналов на основании априорных данных об их динамических свойствах // Естественные и технические науки. 2008. № 3. С. 15-18.

7. Кавчук С.В., Ткаченко Г.И., Савченко Я.С. Априорная оценка средней длительности такта измерения и числа отсчетов при адаптивной временной дискретизации // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. №4. С. 147-155.

8. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 327 с.

9. Заездный А.М., Плоткин Е.И., Черкасский Ю.А. Основы разделения и измерения сигналов по структурным свойствам. Л.: ЛЭИС, 1971. 124 с.

10. Mark, J.W. and T.D. Todd, 1981. A nonuniform sampling approach to data compression. IEEE Transactions on Communications (issue 29), Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, pp: 24-32.

References

1. Adaptivnye teleizmeritel'nye sistemy [Adaptive telemeasuring system]. Avdeev B.Ya., Antonyuk E.M., Dolinov S.N., Zhuravin L.G., Semenov E.I., Fremke A.V., Pod red. Fremke A.V. L.: Energo-izdat. Leningr. otd-nie, 1981. 248 p.

2. Kurevin V.V., Morozov O.G., Morozov G.A. i dr. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2016. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_79_Sinyutin.pdf_e8c1c28197.pdf.

3. Nguen Suan Man', Popov G.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2015. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_53_Nguyen.pdf_29bf05efed.pdf.

4. Kavchuk S.V. Inzhenernyy vestnik Dona (Rus). 2016. №4. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_173_kavchuk.pdf_c921d62655.pdf.

5. Qaisar, S.M., L.L. Fesquet and M.R. Laurent, 2009. Adaptive Rate Sampling and Filtering Based on Level Crossing Sampling. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2009(10.1155/2009/971656), 160 p.

6. Kavchuk S.V., Tkachenko G.I., Tkachenko M.G. [Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2008. № 3. pp. 15-18.

7. Kavchuk S.V., Tkachenko G.I., Savchenko Ya.S. Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki. 2014. №4. pp. 147-155.

8. Goncharov V.L. Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy [The theory of interpolation and approximation of functions]. M.: Gostekhizdat, 1954. 327 p.

9. Zaezdnyy A.M., Plotkin E.I., Cherkasskiy Yu.A. Osnovy razdeleniya i izmereniya signalov po strukturnym svoystvam. L.: LEIS, 1971. 124 p.

10. Mark, J.W. and T.D. Todd, 1981. A nonuniform sampling approach to data compression. IEEE Transactions on Communications (issue 29), Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, pp: 24-32.