Математическое моделирование многомерной оптимизации производства тонкоплёночных структур методом свёртки критериев

Е.О. Тарасенко, А.В. Шапошников, А.В. Гладков, В.С. Тарасенко

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь

Аннотация: В статье рассмотрено математическое моделирование производства тонкоплёночных материалов, основанное на решении многокритериальных оптимизационных задач методом свёртки критериев. Представлен способ оценки коэффициентов в линейной свертке. Разработанная авторами математическая модель позволяет рассчитать максимальную прибыль предприятия от производства тонкоплёночных материалов с учётом затрат на их производство.
Ключевые слова: Тонкая плёнка, подложка, производство, математическое моделирование, многокритериальная оптимизация, свёртка критериев.

Разработаем многокритериальную математическую модель объёмов производства тонкоплёночных материалов с учетом затрат на их производство, которая позволит организовать производственный процесс таким образом, чтобы суммарный доход предприятия был максимальным, а общий объем затрат минимальным.

Пусть требуется оценить объёмы выпускаемой продукции с целью получения максимального дохода от продажи тонкоплёночных материалов при минимальных производственных затратах [1, 2].

Решение поставленной задачи приводит к математической модели

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\cdot y_{ij} \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\cdot y_{ij} \to \min, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot y_{ij} \le \overline{\alpha_i}, \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\cdot y_{ij} \le \overline{\beta_j}, \\ y_{ij} \ge 0,\ i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n, \end{cases} \tag{3}$$

где p_{ij} – выручка предприятия, производящего плёночные структуры, z_{ij} – затраты в рассматриваемом производстве, a_{ij} – расход i-го вещества 1-го типа (плёнка), b_{ij} – расход j-го вещества 2-го типа (подложка), y_{ij} – объем выпускаемой продукции $(i,\ j)$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ [3].

Математическая модель (1) – (3) представляет собой задачу оптимизации с двумя критериями. В основе большинства методов нахождения решений подобных задач лежит идея свёртки критериев [4].

Для решения поставленной задачи воспользуемся линейной свёрткой критериев. Тогда вместо (1) и (2) получим

$$\gamma_1 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_{ij} - \gamma_2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} y_{ij} \to \max, \qquad (4)$$

где $\gamma_1 = const \geq 0$, $\gamma_2 = const \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, назначаются экспертами. Значения этих коэффициентов задаются в зависимости от уровня полезности каждого из критериев [1, 5]. Тогда двухкритериальная задача (1) – (3) сводится к однокритериальной (4), (3), представляющую собой задачу линейного программирования. Её решение может быть найдено известными методами [6].

Далее представим один из способов оценки коэффициентов в (4).

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу с двумя критериями:

$$f_i(x) \to \min_{x \in X}, \; i = 1, 2, ..., m, \qquad (5)$$

здесь $f_i(x)$, $i=1,2,...,m$ – функции, которые определены на множестве $X \subset R^n$, R^n – n-мерное вещественное пространство, и отображают X соответственно в $Y_i \subset R \in (-\infty, \infty)$.

Предлагается применить свёртку критериев $f_i(x)$ из (5), опираясь на идею линейной свёртки критериев [2]. Построение линейной комбинации $f_i(x)$, $i=1,2,...,m$ подразумевает объединение критериев из (5) и приводит к однокритериальной задаче:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \min_{x \in X}, \tag{6}$$

$$\alpha_i = const > 0, i = 1, 2, ..., m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \tag{7}$$

где α_i экспертные оценки.

Далее оценим оценки α_i, $i = 1, 2, ..., m$.

Для определённости предположим, что критерии из (5) не ранжированы. В заданных точках $x^{(1)}, x^{(2)}, ... x^{(r)} \in X$ найдём значения функций $y_i^{(k)} = f_i(x^{(k)})$, $i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., r$. Построим линейную комбинацию:

$$y(\alpha_1, ..., \alpha_m, x^{(k)}) = \alpha_1 f_1(x^{(k)}) + \alpha_2 f_2(x^{(k)}) + ... + \; + \alpha_m f_m(x^{(k)}),\; k = 1, 2, ..., r,$$

здесь α_i, $i = 1, 2, ..., m$, выбираются приближённо на основе решения задачи нелинейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{m} \Big[\left(y(\alpha_1, ..., \alpha_m, x^{(1)}) - y_i^1\right)^2 + \left(y(\alpha_1, ..., \alpha_m, x^{(2)}) - y_i^2\right)^2 + ... \\ + \left(y(\alpha_1, ..., \alpha_m, x^{(r)}) - y_i^r\right)^2 \Big] \to \min_{\alpha_1, ..., \alpha_m} \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \tag{9}$$

$$\alpha_i \geq 0,\; i = 1, 2, ..., m. \tag{10}$$

Далее рассмотрим ранжированные критерии $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$. Причём ранжирование представим в виде

$$f_1(x) >= f_2(x) >= ... >= f_m(x), \tag{11}$$

где соотношение $f_p(x) >= f_{p+1}(x)$, $p = 1, ..., m-1$, означает, что критерий $f_p(x)$ имеет уровень полезности не меньше, чем критерий $f_{p+1}(x)$. Следует учитывать, что уровень полезности $f_p(x)$ по отношению к $f_{p+1}(x)$ неизвестен. Тогда, очевидно, что на α_i, $i = 1, 2, ..., m$, следует наложить дополнительное условие

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n. \tag{12}$$

Теперь задача приближенного вычисления α_i, $i=1,2,...,m$, при их ранжировании по (12) сводится к решению задачи оптимизации (8) – (10), (12). Следует отметить, что решения задач (8) – (10) и (8) – (10), (12), могут не совпадать [7, 8, 9, 10].

Пример. Рассмотрим процесс производства тонкоплёночных структур двух марок (FeSi-45 и FeSi-65) [2].

FeSi-45 и FeSi-65 получаются путём нанесения на поверхность железа Fe плёнки кремния Si различной массы. В таблице 1 представлен расход материалов, рассматриваемого производственного процесса.

Таблица 1

Исходные данные производственного процесса

Вид изделия	Тип вещества		Доход предприятия от производства одной тонны, руб.	Затраты, руб.
	Вещество 1-го типа	Вещество 2-го типа		
FeSi-45	0,48	0,50	21500	7000
FeSi-65	0,34	0,65	29000	12000

Требуется оценить объёмы FeSi-45 и FeSi-65, при которых производственная компания получит наибольшую прибыль при минимальных суммарных затратах; γ_1 и γ_2.

Пусть в распоряжении предприятия имеется по 3 тонны Si и Fe. Обозначим X_1 – количество FeSi-45, X_2 – FeSi-65. Из условия задачи $p_1 = 21500$, $p_2 = 29000$, $q_1 = 7000$, $q_2 = 12000$ $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 3$, $a_{11} = 0{,}48$, $a_{12} = 0{,}5$, $b_{12} = 0{,}34$, $b_{22} = 0{,}65$. Имеем:

$$\begin{cases} 21500X_1 + 29000X_2 \to \max, \\ 7000X_1 + 12000X_2 \to \min, \\ 0{,}48X_1 + 0{,}5X_2 \le 3, \\ 0{,}34X_1 + 0{,}65X_2 \le 3, \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0, \end{cases}$$

(полученная система имеет решение в предположении, что запасы веществ на предприятии используются полностью в производственном процессе).

Решение данной задачи сводится к исследованию задачи линейного программирования. Воспользуемся разработанной программой, найденное решение данной задачи представлено на рисунке 1.

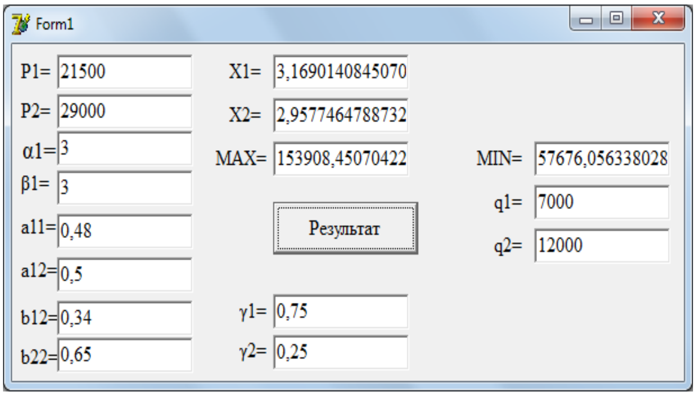

Рис. 1. – Окно программы «Максимальная прибыль, минимальный объем затрат» с учётом предпочтительности критериев

Решение имеет вид: $X_1 = 3{,}16901$ тонны, $X_2 = 2{,}95775$ тонны. Найдены $\gamma_1 = 0{,}75$ и $\gamma_2 = 0{,}25$ это означает, что первый критерий имеет уровень полезности в три раза больший, чем второй критерий. Максимальная прибыль составит 153 908,45 рублей. При этом общий объем составит 57 676,05 рублей.

Таким образом, в статье предложен способ применения метода свёртки критериев для решения производственной задачи. На его основе показано решение многокритериальной оптимизационной задачи производства тонкоплёночных материалов с целью получения максимальной прибыли при минимальных производственных затратах. Предложенный способ прост и удобен в применении.

Литература

1. Галай Е.О. Математическая модель образования плёнок на подложках // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005.

Т.12. Вып. 4. С. 932.

2. Тарасенко Е.О., Семенчин Е.А. Экономико-математическая модель производства пленочных структур // Математическое моделирование, обратные задачи, информационно-вычислительные технологии: сборник статей VII Международной научно-технической конференции. - Пенза, 2007.- С. 146-149.

3. Ильченко А.Н. Экономико-математические методы. М.: Финансы и статистика, 2006. 288 с.

4. Семенчин Е.А., Коротина Т.В. Об одном способе исследования многокритериальных задач // Наука Кубани, 2004. №1. 20-24с.

5. Сытник В.Ф. Каратодава Е.А. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. К.: Выща школа, 1985 г. 482 с.

6. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 304 с.

7. Oura, K., Lifshits V.G., Saranin A.A., Zotov A.V., Katayama M. Surface Science: An Introduction. Springer, 2003. 443 p.

8. Venables, J. Introduction to Surface and Thin Film Processes. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 372 p.

9. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. М: Статистика 1988 г. 476 с.

10. Mahan J. E. Physical Vapor Deposition of Thin Films. Wiley-Interscience. 2000. 340 p.

References

1. Galaj E.O. Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. 2005. T.12. Vyp. 4. p. 932.

2. Tarasenko E.O., Semenchin E.A. Matematicheskoe modelirovanie, obratnye zadachi, informacionno-vychislitel'nye tehnologii: sbornik statej VII Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoj konferencii. Penza, 2007. pp. 146-149.

3. Il'chenko A.N. Jekonomiko-matematicheskie metody [Economic and mathematical methods]. M.: Finansy i statistika, 2006. 288 p.

4. Semenchin E.A., Korotina T.V. Nauka Kubani. 2004. №1. pp. 20-24.

5. Sytnik V.F. Karatodava E.A. Matematicheskie modeli v planirovanii i upravlenii predprijatijami [Mathematical models in the planning and management of enterprises]. K.: Vyshha shkola, 1985. 482 p.

6. Jekonomiko-matematicheskie metody i prikladnye modeli [Economic-mathematical methods and applied models]. Pod red. V.V. Fedoseeva. 2-e izd., pererab. i dop. M.: JuNITI-DANA, 2005. 304 p.

7. Oura, K., Lifshits V.G., Saranin A.A., Zotov A.V., Katayama M. Surface Science: An Introduction. Springer, 2003. 443 p.

8. Venables, J. Introduction to Surface and Thin Film Processes. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 372 p.

9. Terehov L.L. Jekonomiko-matematicheskie metody [Economic and mathematical methods]. M: Statistika, 1988. 476 p.

10. Mahan J. E. Physical Vapor Deposition of Thin Films. Wiley-Interscience. 2000. 340 p.