



Виды геометрических определителей плоской 3-ткани

Ю.М. Бельченко, Н.М. Шумун

Ростовский государственный университет путей сообщения

Аннотация: Геометрическим определителем (ГО) будем называть совокупность геометрических элементов, которые определяют задание 3-ткани на плоскости. ГО криволинейной 3-ткани могут быть только различным способом организованные 3 семейства кривых линий. Прямолинейная 3-ткань может задаваться различными ГО.

Ключевые слова: Плоская 3-ткань, геометрические определители, криволинейная 3-ткань, прямолинейная 3-ткань.

Плоской 3-тканью называются такие 3 семейства линий $f_i(x, y) = f_i = const$, когда $(j = 1, 2, 3)$, которые перекрывают некоторую область \mathfrak{R} плоскости так, что через каждую точку этой плоскости проходит 3 линии разных семейств. Функциональные определители этой 3-ткани

$$\frac{\partial(f_j, f_k)}{\partial(x, y)} \neq 0, (j, k = 2, 3; 3, 1; 1, 2) \quad (1)$$

нигде в области \mathfrak{R} не обращается в нуль, две кривые различных семейств не имеют более одной общей точки.

Если степень уравнения f_i больше или равна 2, то такая 3-ткань называется *криволинейной*. Если семейства f_i будут являться прямыми линиями, то 3-ткань называется *прямолинейной*.

Кроме указанных выше, 3-ткани могут быть и *смешанными*, если элементы одного из семейств является прямыми, а элементы других – кривыми и наоборот (таблица №1).

Геометрическим определителем (далее ГО) будем называть совокупность геометрических элементов, которые определяют задание 3-ткани на плоскости.

Таблица 1

Степень уравнения в зависимости от вида 3-ткани

| Вид 3-ткани \ Вид семейства | f_1 | f_2 | f_3 |
|-----------------------------|------------------|------------------|------------------|
| Криволинейная | Степень ≥ 2 | Степень ≥ 2 | Степень ≥ 2 |
| Прямолинейная | Степень=1 | Степень=1 | Степень=1 |
| Смешанная | Степень ≥ 2 | Степень=1 | Степень=1 |
| | Степень ≥ 2 | Степень ≥ 2 | Степень=1 |

ГО криволинейной 3-ткани могут быть только различным способом организованные 3 семейства кривых линий. Прямолинейная 3-ткань может задаваться различными ГО (таблица №2).

Прямолинейные 3-ткани могут быть использованы для формирования 3-тканей на поверхностях и в пространстве, что является важным для практического применения в построении разверток, конструирования поверхностей и т. д.

Таблица 2

Некоторые виды определителей плоской прямолинейной 3-ткани

| № п/п | Виды определителей плоской прямолинейной 3-ткани |
|-------|--|
| 1 | кривые линии 3-го порядка, 3-го класса |
| 2 | 3 пучка прямых линий с несобственным центром |
| 3 | 3 пучка прямых линий с собственным центром |

На рис. 1 показаны примеры плоских 3-тканей: криволинейная 3-ткань, составленная из дуг окружностей, проходящих через 3 точки опорной окружности и прямолинейная 3-ткань, определяемая пучками прямых с несобственными центрами – вершинами опорного треугольника.

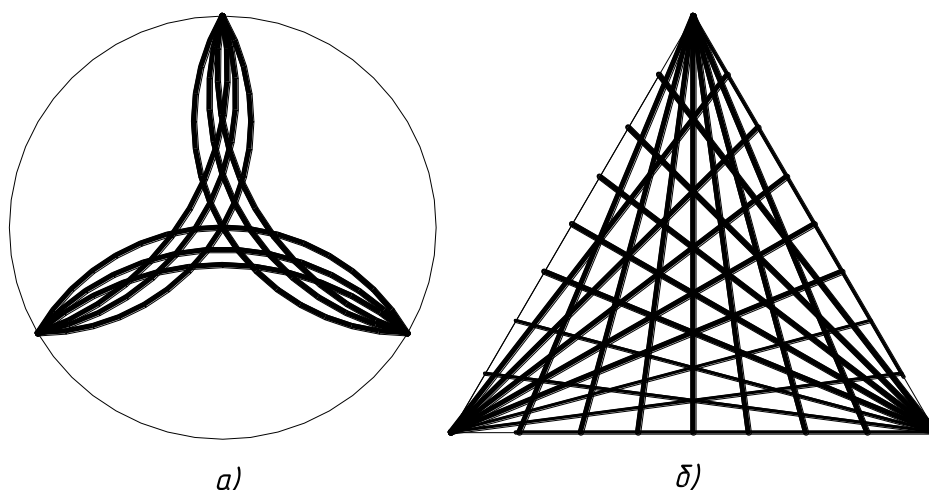


Рис. 1. – 3-ткань

а) криволинейная 3-ткань; б) прямолинейная 3-ткань

На рис. 2 показан пример смешанной 3-ткани, составленной из пучков окружностей, проходящих через точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$ и двух пучков прямых с несобственными центрами.

С геометрической точки зрения наиболее интересными являются плоские 3-ткани с ГО – кривыми 3-го порядка, 3-го класса. Классом называется степень уравнения кривой, записанного в тангенциальных координатах. Графически класс кривой линии равен количеству касательных (в том числе и мнимых) к кривой, проведенных из точки на плоскости не лежащей на кривой. Такие кривые могут быть алгебраическими и трансцендентными.

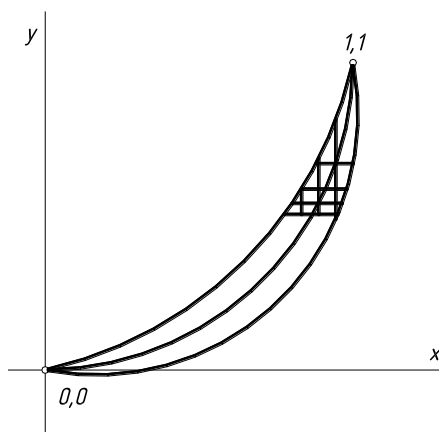


Рис. 2. – Смешанная 3-ткань

Трансцендентными называются кривые, уравнения которых имеют вид $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и т.д.

На рис. 3 показана гипоциклоида с тремя заострениями, уравнение которой имеет вид

$$x = \frac{2b}{3} \cdot \sin \frac{t}{3} - \frac{b}{3} \cdot \sin \frac{2t}{3},$$
$$y = \frac{2b}{3} \cdot \cos \frac{t}{3} - \frac{b}{3} \cdot \cos \frac{2t}{3}$$

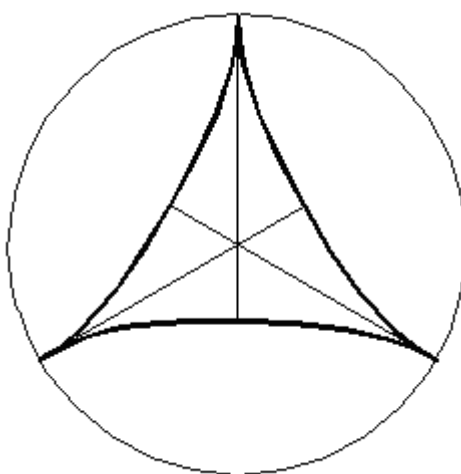


Рис. 3. – Гипоциклоида с тремя заострениями

На рис. 4 показана трехдиагональная гиперболическая гипербола каноническое уравнение формы А (по И. Ньютону) которой имеет вид

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

Когда $e = 0, b^2 = 4 \cdot ac$.

Из каждой точки области определения \mathfrak{R} можно провести 3 прямые (рис. 4), которые в совокупности образуют плоскую прямолинейную 3-ткань, отвечающую требованиям (1).

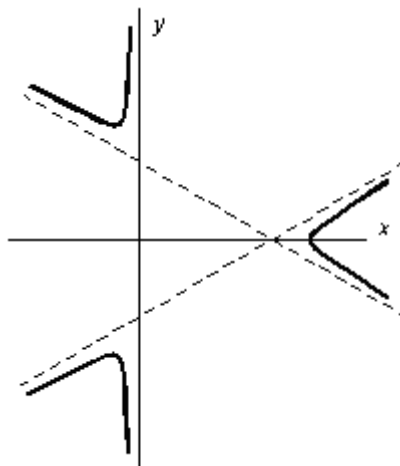


Рис. 4. – Трехдиагональная гиперболическая гипербола

Литература

1. Бельченко Ю.М., Шумун Н.М. Конструирование плоскостей на базе плоской шестиугольной 3-ткани // Инженерный вестник Дона, 2015, №2 (часть 2). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884/.

2. Бельченко Ю.М., Шумун Н.М. Моделирование 3-ткани для минимальных поверхностей // Инженерный вестник Дона, 2015, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2015/3371/.

3. Бельченко Ю.М., Шумун Н.М. Моделирование 3-ткани на поверхностях // Инженерный вестник Дона, 2016, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3766/.

4. Рачковская Г.С. Математическое моделирование кинематических линейчатых поверхностей на основе однополостного гиперboloида вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1499/.

5. Толстихина Г.А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей: автореф. дис. д-р физ.-мат. наук: 01.01.04. - Казань, 2007. - 29 с.



6. Гольдберг В.В. О существовании паратактических три-тканей // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2008. - №4 (551). - С. 22-27.

7. Пиджакова Л.М. Три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. - Тверь, 2009. - 20 с.

8. Шестакова М.А. Шестиугольные три-ткани с частично симметричным тензором кривизны: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. - Тверь, 2003. - 116 с.

9. Жан Гастон Дарбу Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения анализа бесконечно малых. В 4 томах. Том 1. Общие понятия. Криволинейные координаты. Минимальные поверхности. М.: Институт компьютерных исследований, 2013. 620 с.

10. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

11. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.

References

1. Bel'chenko Ju.M., Shumun N.M. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №2. (chast' 2) URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884/.

2. Bel'chenko Ju.M., Shumun N.M. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3371/.

3. Bel'chenko Ju.M., Shumun N.M. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3766/.



4. Rachkovskaya G.S. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1499/.

5. Tolstikhina G.A. Algebra i geometriya tri-tkaney, obrazovannykh sloeniyami raznykh razmernostey: avtoref. dis. d-r fiz.-mat. nauk: 01.01.04 [Algebra and geometry three - the fabrics formed by sloeniye of different razmernost]. Kazan', 2007, 29 p.

6. Goldberg V.V. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika (Rus), 2008. №4 (551). URL: cyberleninka.ru/article/n/o-suschestvovanii-paratakticheskikh-tri-tkaney.

7. Pidzhakova L.M. Tri-tkani s kovariantno postoyannymi tenzorami krivizny i krucheniya: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04. [Tri - fabrics with covariant constant tensors of curvature and torsion]. Tver', 2009, 20 p.

8. Shestakova M.A. Shestiugol'nye tri-tkani s chastichno simmetrichnym tenzorom krivizny: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04. [Shestiugolne three - fabrics with partially symmetric tensor of curvature]. Tver', 2003, 116 p.

9. Darbu Zh.G. Lekcii po obshhej teorii poverhnostej i geometricheskie prilozheniya analiza beskonechno malyh. V 4 tomah. Tom 1. Obshhie ponjatija. Krivolinejnye koordinaty. Minimal'nye poverhnosti. M.: Institut komp'yuternyh issledovaniy, 2013. 620 p.

10. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

11. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.