

## Структура плоских стержневых систем

*Кузнецов С.А.*

*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)  
имени М.И. Платова  
Новочеркасск*

**Аннотация:** Выбор метода силового расчета строительных конструкций предваряется анализом статической определимости и неизменяемости стержневой системы с помощью структурных формул, при этом для разных типов конструкций – для балок, ферм, рам, арок и так далее – источниками предлагаются разные формулы. Показано, что для структурного анализа всех стержневых систем достаточно определить степень аномальности структуры по формуле П.Л. Чебышева. Развитие линейно-монадной теории структуры позволяет формализовать зависимости количества стержней и шарниров от количества внешних и внутренних контуров при синтезе как нормальных, так и аномальных структур

**Ключевые слова:** балка, ферма, рама, арка, структура, анализ, синтез, неизменяемость, определимость, степень аномальности, стержни, система, контур, монада, шарнир

**Сведения из линейной теории структуры.** Статическая определимость строительных систем подразумевает возможность расчета усилий во всех элементах системы с помощью уравнений статики.

В теории механизмов и машин аналогичные задачи решаются в ходе структурного анализа с использованием структурных формул, параметрами которых являются количество звеньев и количество кинематических пар (шарниров). Первая и основополагающая формула структурного анализа носит имя великого математика и механика П.Л. Чебышева; эту формулу он вывел при исследовании шарнирного четырехзвенника [1]:

$$3m - 2(n + v) = 1.$$

Здесь  $m$  – количество подвижных звеньев;

$n+v$  – количество подвижных и неподвижных шарниров; если их не разделять,  $3m - 2m = 1$ , или, в современных обозначениях,

$$3n - 2p = 1,$$

где  $n$  – количество звеньев (в строительной механике дисков);

$p$  – количество шарниров.

Результат, равный единице, означает число степеней свободы, точнее, количество входных звеньев (входных связей) для данного механизма, достаточное для его подвижности, с одной стороны, и определенности положения (неизменяемости), - с другой. Для строительных систем, не имеющих подвижности, этот параметр принимается равным нулю. Насколько правомерно отождествление звеньев с дисками? Обратимся к определению В.А. Киселева: «Отдельными элементами плоских стержневых систем являются различного вида стержни... Эти стержни независимо от их конкретной геометрической формы, а также неизменяемые системы, составленные из них, будем называть дисками и изображать их для анализа структуры систем в виде плоской фигуры любой неопределенной формы» [2]. Уточнение В.А. Киселева «Эти стержни независимо от их конкретной геометрической формы...», является явным признаком структурного, а не кинематического исследования. Традиция ошибочно относить структурные исследования к кинематике имеет, видимо, исторические корни [3].

Наконец, большой проблемой является неоправданное многообразие формул для определения «геометрической неизменяемости» стержневых систем в учебниках по строительной механике, причем для каждого типа конструкции опять же применяется разная формула [4-6].

Наибольшего развития и высокой степени формализации структурная теория достигла именно в рамках теории механизмов и машин, где раздел «Структура механизмов» стал базовым не только для определения свойств механизмов, но и для идентификации самой научной дисциплины. Главным признаком структурного уровня исследования как раз и является неиспользование размерных и силовых параметров. Развитие формулы П.Л. Чебышева оказалось возможным в сторону расширения возможных способов подвижного соединения звеньев – к вращательным шарнирам добавились

---

цилиндрические, сферические, а также линейные и точечные кинематические пары, кроме того к числу структурных связей можно отнести входные связи, наложенные на входные звенья (этот параметр для строительных систем неактуален) [7]. Существенным отличием строительных конструкций от механизмов является то, что в механизмах все эти кинематические пары фактически имеют место, а в строительных конструкциях они условны, поскольку в реальности стержни соединяются с помощью сварных, заклепочных соединений и даже зубчатых пластин (для деревянных ферм) [8]. Кроме того, в специфических случаях, при большой длине стержней необходимо учитывать их упругие свойства [9], которые также оказывают влияние на изменяемость системы. В простейшем случае будем использовать только вращательные шарниры без учета входных связей, в этом случае на базе формулы П.Л. Чебышева получаем структурную характеристику «степень аномальности» в укороченном виде:

$$S = 3n - 2p, \quad (1)$$

где  $n$  – число подвижных звеньев (стержней или «дисков»);

$p$  – количество вращательных шарниров.

Покажем, что данная формула может успешно применяться при структурном анализе как механических, так и строительных систем. Для этого перепишем ее в виде, более привычном для строительной механики, то есть звенья будем обозначать буквой  $D$ , а шарниры буквой  $Ш$ . Кроме того, для исследования рам введем параметр  $\Pi$  – припайка, с коэффициентом 3, соответствующим неподвижному соединению:

$$W = 3D - 3\Pi - 2Ш, \quad (2)$$

где под  $Ш$  будем понимать количество всех простых шарниров, а не только «внутренних». Если в узле сходятся несколько стержней, то количество простых шарниров на единицу меньше количества стержней. Кроме того, в

---

суммарное число дисков  $D$  необходимо включить и опорные стержни, чтобы в полной мере соответствовать концепции П.Л. Чебышева.

Итак, рассмотрим различные схемы рам, сначала одноконтурных (Рис.1).

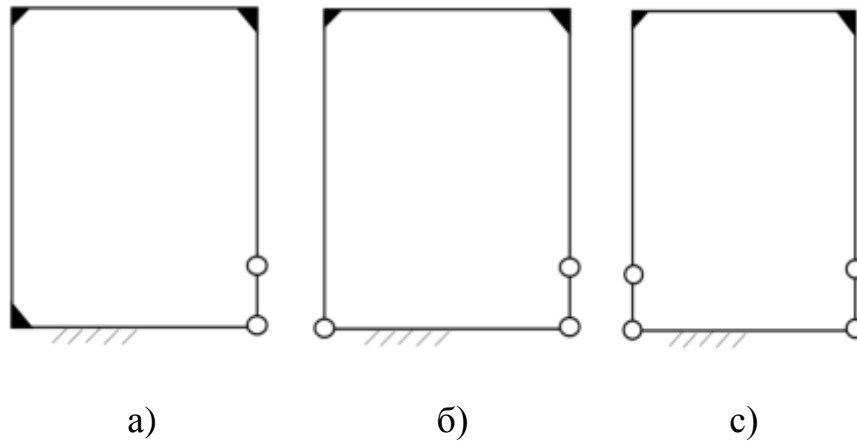


Рис. 1 – Рамы различной степени статической определимости

Первая рама (рис.1, а) содержит четыре диска, включая опорный стержень, три припайки и два шарнира. Неподвижное соединение диска с «землей» входит в число этих трех припаяек, что вполне логично. После подстановки данных параметров в формулу (2) получаем единожды статически неопределимую систему, обладающую, тем не менее, геометрической неизменяемостью.

$$W = 3D - 3П - 2Ш = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

Проверяем результат по формуле (1), учитывая, что в данной системе только одно звено закреплено подвижно – двухшарнирная опора. Сама рама не может быть отнесена к подвижным звеньям, так как закреплена на стойке неподвижно.

$$S = 3n - 2p = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1$$

Результат подтверждается, несмотря на то что припайки не учитывались.

Заменим в данной раме нижнюю припайку на шарнир (рис.1, б) и получим статически определимую систему, обладающую к тому же геометрической неизменяемостью:

$$W = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0, \text{ или, с учетом двух}$$

условно подвижных звеньев, то есть шарнирно закрепленных:

$$S = 3n - 2p = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Наконец, та же рама, но установленная на двух шарнирных опорах (рис.1, в), дает лишнюю подвижность, предполагающую геометрическую изменяемость:

$$W = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 1,$$

С точки зрения структурной теории, система содержит три подвижных звена (две опоры и раму) и четыре шарнира.

$$S = 3n - 2p = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Перейдем теперь к исследованию структуры более сложной, двуконтурной рамы (рис.2) содержащей 5 стержней, 4 припайки и 3 шарнира.

$$W = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -3, \text{ что означает три}$$

избыточные связи, то есть трижды неопределимую систему. Фактически система содержит только одно подвижно закрепленное звено - двухшарнирную опору, поэтому по формуле 1 получается аналогичный результат

$$S = 3n - 2p = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -3.$$

Из приведенных примеров очевидно, что результаты, полученные по формулам (1) и (2), не отличаются. Это означает, что, если не учитывать параметр 3П в формуле (2), то результат расчета не изменится, что подтверждает актуальность формулы (1), близкой к формуле П.Л. Чебышева.

---

Концепция линейной теории структуры предполагает и более глубокий уровень исследования, а именно – поконтурный, когда структурные формулы применяются в каждом контуре отдельно [7]. Это позволяет уточнить распределение избыточных связей и лишних подвижностей по контурам. При этом в каждом последующем контуре не учитываются смежные параметры, то есть учтенные в предыдущем контуре. В теории механизмов первым принимается входной контур, то есть содержащий входную связь. В строительных системах входная связь не используется, поэтому можно начинать с любого контура, а при необходимости изменить последовательность контуров, чтобы добиться наилучшего варианта статической определимости системы. Например, для двухконтурной рамы на рис.2 сначала определим структурную характеристику левого контура, в котором три диска, три припайки и один шарнир, используя формулы (2) и (1).

$$W_1 = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2.$$

$$S_1 = 3n - 2p = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2.$$

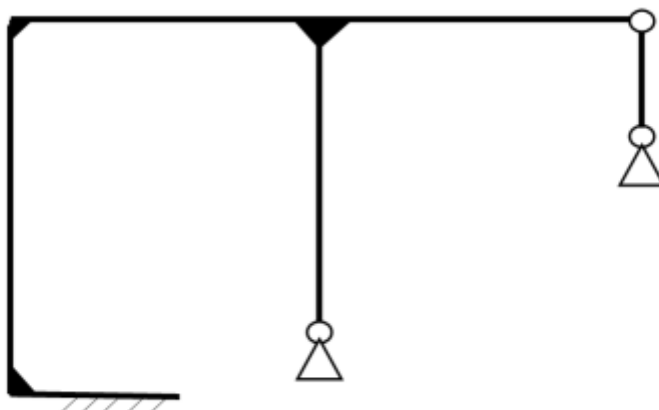


Рис. 2 – Двухконтурная рама

Получаем в этом контуре две избыточные связи. На второй контур осталось два диска, одна припайка и два шарнира:

$$W_2 = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1.$$

$$S_2 = 3n - 2p = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Ожидаемо в этом контуре одна избыточная связь (всего в системе их три).

Поконтурный анализ в обратном порядке (справа налево) дает следующие результаты:

$$W_1 = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$W_2 = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = -3$$

В целом избыточных связей осталось также три, но появилась возможность выбирать последовательность для дальнейшего расчета. Соответственно, и проверочный расчет по формуле (1) дает аналогичный результат, но только избыточные связи поменяли свое контурное базирование:

$$S_1 = 3 \cdot n - 2 \cdot p = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -3.$$

$$S_2 = 3 \cdot n - 2 \cdot p = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0.$$

Выбор последовательности поконтурного анализа определяет методику дальнейшего силового расчета.

Рассмотренных примеров достаточно, чтобы установить идентичность результатов по формулам (1) и (2), в том числе, если речь не идет о неподвижных соединениях, называемых припайками, поэтому в последующих примерах можно использовать формулу (1) для определения степени аномальности структуры, как и в структурном анализе механизмов, только упрощенную. В дальнейших расчетах будем использовать формулу (1), тем более, что последующие примеры не содержат припаяек.



Рис. 3 – Статически неопределимая балка

Рассмотрим балку на двух опорных стержнях (рис.3) с одной жесткой заделкой и одной подвижной, которую можно приравнять к ползуну, который приравнивается к шарниру, поскольку обладает одной подвижностью. Степень аномальности  $S = 3n - 2p = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4$ .

Итак, приведенные примеры убеждают в справедливости применения формулы (1) для различных строительных систем при расчете степени статической неопределимости, а точнее, степени аномальности, то есть при структурном анализе, при выполнении которого не используются силовые и кинематические (размерные) параметры.

**Сведения из монадной теории структуры.** Проектирование стержневых систем предполагает процесс, обратный анализу, а именно структурный синтез, при котором характеристики задаются, а результатом становятся параметры схемы. Задачу эту можно решить, опираясь на базу знаний, основанную на *монадной теории структуры* [10]. Именно такой подход позволяет, с одной стороны, выразить структурную характеристику через количество стержней и треугольных контуров, что гораздо удобней применительно к фермам, и наоборот, определить количество стержней и треугольников строительной системы нормальной структуры.

Сущность монадной теории структуры состоит в том, что степень аномальности структуры не изменяется при определении как на уровне целых звеньев (дисков)  $n$ , так и на монадном уровне, то есть выраженная через количество стержней (монад)  $m$ . Например, степень аномальности на



монадном уровне определяется по формуле (последующие формулы адаптированы к потребностям строительной механики и упрощены за счет принятия  $S = 0$  и  $p_0 = 0$ ):

$$S = 3m - 2p_m,$$

где  $m$  – число монад, то есть отдельных стержней;

$p_m$  – количество простых шарниров, то есть однократных.

Поскольку структура фермы должна быть нормальной, приравняем  $S = 0$ , откуда:

$$p_m = \frac{3m}{2}$$

Количество независимых контуров на уровне целых звеньев по формуле Х.И. Гохмана  $c = p - n$ , а на монадном уровне  $c_m = p_m - m$ .

Если выразить количество треугольников через количество контуров  $\Delta = c_m - c = p_m - m - c$ , то количество монад (стержней) можно подсчитать по формуле:

$$m = 2(c + \Delta). \quad (3)$$

Количество простых шарниров, то есть кинематических пар на монадном уровне, определяется по формуле:

$$p_m = \frac{3m}{2} = \frac{3 \cdot 2(c + \Delta)}{2} = 3(c + \Delta) \quad (4)$$

В этих формулах  $c$  – количество внешних контуров;  $\Delta$  – количество внутренних контуров, в данном случае треугольников.

Теперь можно перейти к количеству звеньев (дисков)  $n = 2c$  и к количеству кратных шарниров на схеме:

$$p = c_m + n = p_m - m + 2c \quad (5)$$

Получена база знаний, позволяющая выразить степень статической неопределимости (степень аномальности) через количество внешних контуров  $c$  и количество треугольников  $\Delta$ , что, с одной стороны, удобно, с другой – позволяет использовать полученные зависимости для синтеза статически определимых структур. Рассмотрим простые примеры. На рисунке 4,а показана статически определимая трехпролетная ферма. Она содержит один внешний контур  $c = 1$  и количество треугольников  $\Delta = 5$ . Этих данных достаточно для структурного расчета.

Определяем количество стержней (монад) по формуле (3):

$$m = 2(c + \Delta) = 2(1 + 5) = 12.$$



а)

б)

Рис. 4 – Трехпролетная ферма: а) статически определимая;  
б) статически неопределимая

Далее, количество простых (однократных) шарниров определим по формуле (4):

$$p_m = 3(c + \Delta) = 3(1 + 5) = 18.$$

Количество кратных шарниров на схеме по формуле (5):

$$p = p_m - m + 2c = 18 - 12 + 2 \cdot 1 = 8.$$

Очевидно, что полученные результаты совпадают с параметрами схемы.

Уточним, что данные формулы составлены с учетом условия статической и кинематической определимости ( $S = 0$ ), поэтому они не подходят для расчета неопределимых структур. Результат расчета

показывает, какими должны быть параметры статически определимой неподвижной системы при ее синтезе.

В общем виде степень аномальности можно выразить через количество стержней (монад)  $S = 3 \cdot m - 2p_m$ . Применительно к схеме на рис. 4, а степень аномальности:

$$S = 3m - 2p_m = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 18 = 0,$$

а на рис. 4, б степень аномальности  $S = 3 \cdot m - 2p_m = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 17 = -1$ , что означает одну избыточную связь.

И еще один пример, на этот раз система (рис.5) имеет лишнюю подвижность  $S = 1$ , то есть изменяемая, и при расчете необходимо учитывать этот параметр. Входными параметрами также будем считать один внешний контур (от неподвижного шарнира до неподвижного) и четыре треугольника.

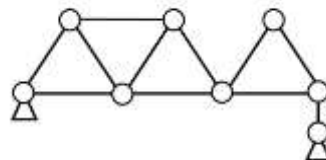


Рис. 5 – Система с лишней подвижностью

Определяем количество стержней (монад)

$$m = S + 2(c + \Delta) = 1 + 2(1 + 4) = 11.$$

Далее, количество простых (однократных) шарниров

$$p_m = S + 3(c + \Delta) = 1 + 3(1 + 4) = 16.$$

Количество дисков (звеньев)  $n = S + 2 \cdot c = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ .

Количество шарниров на схеме (кружочков)

$$p = p_m - m + 2c + S = 16 - 11 + 2 \cdot 1 + 1 = 8.$$

## Литература

1. Чебышев П.Л. О параллелограммах // ПСС Т.4. Теория механизмов. -М.: Изд-во АН СССР, 1948. С.16-36.
2. Киселев В.А. Строительная механика. Учебник для вузов. Изд. 3-е, доп. М.: Стройиздат, 1976. 511 с.
3. Рабинович И.М. О структуре плоских систем // Кинематический метод в строительной механике в связи с графической кинематикой и статикой плоских цепей. М.: Изд. МВТУ, 1928. 407 с.
4. Снитко Н.К. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1980. 431 с.
5. Ржаницын А.Р. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.
6. Чирас А.А. Строительная механика. Теория и алгоритмы: Учеб. для вузов. М.: Стройиздат, 1989. 255 с.
7. Kuznetsov S.A. Linear Theory of the Structure of Mechanisms. IOP Conf.series: Materials Science and Engineering. Modeling of technical system. 2020, P. 042008, URL: [iopscience.iop.org/volume/1757-899X/971](http://iopscience.iop.org/volume/1757-899X/971)
8. Туменова И.М. Параметрическая оптимизация трапециевидной деревянной фермы с восходящими раскосами на металлических зубчатых пластинах // Инженерный вестник Дона, 2017, №2. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n2y2017/4165/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2017/4165/).
9. Личковаха А.С., Шемшур Б.А., Кузнецов С.А. Исследование напряженно-деформированного состояния внецентренно сжатого стержня большой гибкости // Инженерный вестник Дона, 2018, №1. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2018/4773/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2018/4773/).
10. Kuznetsov S.A. Monad Theory of Structural Synthesis of Mechanisms. ICMTMTE: WEB Conference MATEC. URL: [doi.org/10.1051/matecconf/202134603041](https://doi.org/10.1051/matecconf/202134603041)

## References

Chebyshev P.L. O parallelogrammah. PSS T.4. Teoriya mehanizmov. [On Parallelograms. PSS T.4. Theory of Mechanisms]. M.: Izd-vo AN SSSR, 1948. pp.16-36.

1. Kiselev V.A. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. Izd. 3-e, dop. M.: Strojizdat, 1976. 511 p.

2. Rabinovich I.M. Kinematcheskij metod v stroitel'noj mehanike, gl.III. M.: Izd. Moskovskogo vysshego tehničeskogo uchilishha, 1928. 407 p.

3. Snitko N.K. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. M.: Vysshaja shkola, 1980. 431 p.

4. Rzhanicyn A.R. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. M.: Vysshaja shkola, 1982. 400 p.

5. Chiras A.A. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. M.: Strojizdat, 1989. 255 p.

6. Kuznetsov S.A. Linear Theory of the Structure of Mechanisms. IOP Conf.series: Materials Science and Engineering. Modeling of technical system. 2020, P. 042008, URL: [iopscience.iop.org/volume/1757-899X/971](http://iopscience.iop.org/volume/1757-899X/971)

7. Tumenova I.M. Inzhenernyj vestnik Dona, 2017, №2. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n2y2017/4165/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2017/4165/).

8. Lichkovaha A.S., Shemshura B.A., Kuznecov S.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №1. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2018/4773/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2018/4773/).

9. Kuznetsov S.A. Monad Theory of Structural Synthesis of Mechanisms. ICMTMTE: WEB Conference MATEC. URL: [doi.org/10.1051/matecconf/2021346030](https://doi.org/10.1051/matecconf/2021346030)

**Дата поступления: 23.08.2024**

**Дата публикации: 25.09.2024**