Ресурсные сети с вентильной достижимостью

Х. Абдулрахман, Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В настоящей работе рассмотрена модель распределения ресурсов в эргодических и полуэргодических ресурсных сетях с вентильной достижимостью. Предложен подход для моделирования процесса перераспределения ресурса в сети с вентильной достижимостью при помощи вспомогательной сети. Разработаны методы нахождения порогового значения и предельного состояния для произвольной величины суммарного ресурса в сети с вентильной достижимостью.

Ключевые слова: ресурсная сеть, распределение потока, ресурсный поток, нестандартная достижимость, предельное состояние, пороговое значение.

1. Введение

Ресурсные сети введены и исследованы в работах О.П. Кузнецова и Л.Ю. Жиляковой (см., например, [1 - 5]). Ресурсная сеть – это сеть, для каждой дуги которой указана пропускная способность, а для каждой вершины – величина находящегося в ней ресурса. В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по определённым правилам.

В работах [2-3] рассмотрены правила перераспределения ресурса между смежными вершинами и разработаны методы нахождения порогового значения в ресурсных сетях. Однако, для ресурсных сетей с ограничениями на достижимость (см. [6], [7]) задача поиска предельного распределения ресурса является более сложной, поскольку прохождение ресурса по некоторым путям в сети, существенно меняет правило для его распределения (см. [8 - 10]).

Настоящая статья посвящена исследованию процессов распределения ресурса в эргодических и полуэргодических сетях с вентильной достижимостью. Основной задачей работы является разработка метода нахождения порогового значения и предельного состояния в ресурсной сети с условием вентильной достижимости для произвольной величины суммарного ресурса.

2 Эргодические ресурсные сети с вентильной достижимостью

Приведем основные определения и понятия необходимые для дальнейшего изложения (см. [1-5], [7], [10], [11]).

Определение 1. *Ресурсной сетью называется ориентированная сеть* $G(X,U,f)$, *для которой в каждый момент времени t* (≥ 0) *задана вектор-функция* $\mathbf{Q}(\mathrm{t})=(q_1(t);\ldots;q_n(t))$ $(n=|X|)$. *Здесь величина* $q_i(t)\geq 0$ $\forall \mathrm{i}\in[1;\mathrm{n}]_Z$ *называется количеством ресурса в вершине* x_i *в момент времени t, а* $\mathbf{Q}(\mathrm{t})$ – *состоянием сети в момент времени t.*

Состояние $\mathbf{Q}(0)$ называется начальным распределением ресурса в сети G, а следующие состояния сети определяются из соотношения

$$q_i(t+1)=q_i(t)-\sum_{u\in[x_i]^+}F(u,t)+\sum_{u\in[x_i]^-}F(u,t).\ \forall \mathrm{i}\in[1;\mathrm{n}]_Z. \tag{1}$$

Величины $F(u,t)$ в соотношении (1) определяются по следующему правилу (полагаем здесь, что x_j – начальная вершина дуги u):

$$F(u,t)=\begin{cases} r(u), & q_j(t)>\sum\limits_{v\in[x_j]^+}r(v); \\ \dfrac{r(u)}{\sum\limits_{v\in[x_j]^+}r(v)}\cdot q_j(t), & q_j(t)\leq\sum\limits_{v\in[x_j]^+}r(v). \end{cases}$$

Определение 2. *Состояние* $\mathbf{Q}(\mathrm{t})$ *называется устойчивым, если выполняется* $\mathbf{Q}(\mathrm{t})=\mathbf{Q}(t+1)=\mathbf{Q}(t+2)=\mathbf{Q}(t+3)=\cdots$, *а состояние* $\mathbf{Q}^*=(q_1^*;\ldots;q_n^*)$ *называется асимптотически достижимым из состояния* $\mathbf{Q}(0)$, *если для любого* $\varepsilon>0$ *существует* t_ε *такое, что для всех* $\mathrm{t}>\mathrm{t}_\varepsilon$ $|\mathrm{q}_i^*-\mathrm{q}_i(\mathrm{t})|<\varepsilon$, $\forall \mathrm{i}\in[1;\mathrm{n}]_Z$.

Определение 3. *Состояние* $\mathbf{Q}^*$ *называется предельным, если оно либо устойчиво и за конечное число шагов получается из начального состояния* $\mathbf{Q}(0)$, *либо асимптотически достижимо из начального состояния* $\mathbf{Q}(0)$.

Рассмотрим вопрос распределения ресурсов в эргодических (сильно связных) ресурсных сетях с вентильной достижимостью [6], [7].

Пусть эргодическая ресурсная сеть $G(X,U,f)$ такая, что $U = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_k$ при этом $U_i \cup U_j = \varnothing$ $(\forall\, 0 \le i < j \le k)$. Путь μ называется вентильно-накопительным путем порядка $(k \ge 1)$ длины $(n \in \mathrm{N})$ на сети G, если к m дуг вентильного пути μ содержалась хотя бы одна дуга множества U_j, то следующая дуга пути обязана быть дугой множества $U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_{j+1}$. Сетью с вентильной достижимостью называется сеть, в которой допустимыми путями являются только вентильно-накопительные пути. Согласно [7], основной подход к решению задачи о вентильной достижимости состоит в построении вспомогательного графа $G'(X',U',f')$, количество вершин которого больше, чем у исходной сети $G(X,U,f)$, но на котором нет ограничений на достижимость. При этом каждому пути на вспомогательном графе соответствует единственный вентильно-накопительный путь на исходном (см. [6], [7]).

Согласно указанному подходу, правила построения вспомогательной сети G' для сети G с условием вентильной достижимости имеют вид:

каждой вершине x сети G ставится в соответствие $k+1$ вершина $\{x^0, x^1, \ldots, x^k\}$ на вспомогательной сети G'. Каждой дуге $f(u) = (x, y) \in U_l$ $(l<k)$ исходной сети G ставится в соответствие $k - l + 1$ дуга $\{u^l, u^{l+1}, \ldots, u^k\}$ на вспомогательной сети G' такая, что $f'(u^l) = (x^l, y^{l+1})$, $f'(u^{l+i}) = (x^{l+i}, y^{l+i})$; а каждой дуге $u = f(x, y) \in U_k$ сети G ставится в соответствие одну дугу u^k такую, что $f'(u^k) = (x^k, y^k)$. Пропускные способности дуг исходной сети G переносятся на соответствующие дуги вспомогательной сети G'.

Множество дуг вспомогательной сети, соответствующих дуге u на исходной сети будем обозначать через A_u, а подмножества вершин вида $\{x^j\}_{x \in X}$ $- j$-тым уровнем вентильности.

Пример 1. Рассмотрим эргодическую сеть G с вентильной достижимостью на рис.1, для которого дуги u_1, u_2, …, u_{10} таковы, что $f(u_1)=(x_1,x_2)$, $f(u_2)=(x_2,x_4)$, $f(u_3)=(x_4,x_3)$, $f(u_4)=(x_3,x_1)$, $f(u_5)=(x_4,x_5)$, $f(u_6)=(x_5,x_4)$, $f(u_7)=(x_5,x_6)$, $f(u_8)=(x_6,x_7)$, $f(u_9)=(x_7,x_5)$, $f(u_{10})=(x_7,x_7)$.

Положим $k=2$, $U_0=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_7,u_8,u_9\}$, $U_1=\{u_{10}\}$, $U_2=\{u_5,u_6\}$. Согласно, методу построения вспомогательной сети (см. [6], [7]), построим сеть G' (см. рис.1.)

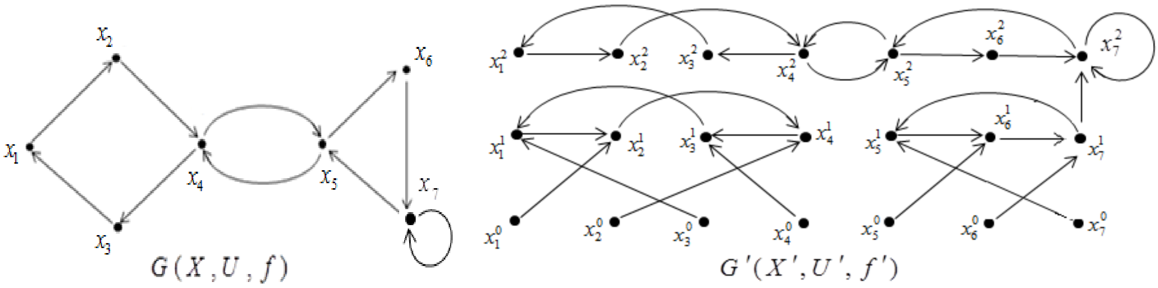

Рис. 1. Сеть G и соответствующая ей вспомогательная сеть G'.

Рассмотрим ресурсную сеть $G(X,U,f)$ с вентильной достижимостью и рассмотрим матрицу

$$\mathbf{Q}'(t)=\begin{pmatrix} q_1^k(t) & q_2^k(t) & \dots & q_n^k(t) \\ q_1^{k-1}(t) & q_2^{k-1}(t) & \dots & q_n^{k-1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^0(t) & q_2^0(t) & \dots & q_n^0(t) \end{pmatrix},$$

где $q_i^j(t)$ которой является величиной ресурса вершины i в момент времени t, имеющего j-й уровень вентильности. Не нарушая общности, будем полагать, что такая матрица определяет состояние не только на исходной сети G, но и на вспомогательной сети G'. Другими словами, распределение ресурса в сети с вентильной достижимостью мы будем моделировать при помощи вспомогательной сети.

Рассмотрим правила распределения ресурса в сети с вентильной достижимостью. Поскольку каждой дуге u исходной сети с пропускной способность $r(u)$ соответствует множество дуг A_u на вспомогательной ресурсной сети, то, как и в случае классического потока в сетях с вентильной достижимостью (см., например, [6]), необходимо выполнение следующего условия: *суммарный поток по дугам множества* A_u *не может превосходить величину* $r(u)$. Таким образом, будем полагать, что распределение ресурса в сети G, с состоянием $\mathbf{Q}'(t)$ происходит по правилу, аналогичному (1). Ресурсные потоки по дугам вспомогательной сети определяются следующим образом:

рассмотрим дугу $u' \in U'$, её пропускная способность равна $r(u')$. Пусть дуга u' соответствует дуге $u \in U_\alpha$, ($\alpha = 0,1,\ldots,k$) исходной сети G. Тогда будем полагать, что величина потока, проходящего по данной дуге в момент времени t имеет вид:

$$F(u',t) = \frac{q_i^\beta(t)}{\sum\limits_{j=\alpha}^{k} q_i^j(t)} \cdot \frac{r(u')}{\sum\limits_{v\in\left[x_i^\beta\right]^+} r(v)} \cdot \min\left\{\sum_{j=\alpha}^{k} q_i^j(t),\ \sum_{v\in\left[x_i^\beta\right]^+} r(v)\right\}, \qquad (2)$$

где $q_i^\beta(t)$ – количество ресурса вершины $x_i^\beta = (p_1 \circ f')(u')$ в момент времени t, $i = 0,1,\ldots,n$, $\beta = 0,1,\ldots,k$.

Пример 2. Рассмотрим эргодическую ресурсную сеть G примера 1 с пропускными способностями $r(u_1) = r(u_4) = r(u_5) = r(u_7) = r(u_9) = 2$, $r(u_2) = r(u_6) = 1$, $r(u_3) = r(u_8) = 3$, $r(u_{10}) = 5$. Пусть начальное состояние на вспомогательной сети G' имеет вид:

$$\mathbf{Q}'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда распределение ресурсов происходит следующим образом (значения представлены с точностью до третьего знака после запятой):

$$\mathbf{Q}'(1)=\begin{pmatrix}1{,}933 & 0{,}4 & 1{,}267 & 0 & 1{,}257 & 0 & 5{,}571\\ 3{,}067 & 1{,}6 & 2{,}333 & 1 & 0{,}571 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\mathbf{Q}'(10)=\begin{pmatrix}0{,}588 & 3{,}818 & 0{,}592 & 0{,}989 & 1{,}826 & 1{,}227 & 4{,}873\\ 0{,}660 & 6{,}075 & 0{,}640 & 0{,}625 & 0{,}016 & 0{,}043 & 0{,}027\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \ldots .$$

3 Нахождение порогового значения и предельного

Пусть $G(X,U,f)$ – эргодическая ресурсная сеть с вентильной достижимостью. Отметим, что её вспомогательная сеть $G'(X',U',f')$ в общем случае состоит из множеств изолированных вершин, стоков и компонент связности H_j.

Заметим, что каждая изолированная вершина $\hat{x}\in X'$ вспомогательной сети в предельном состоянии имеет величину ресурса такую же, как и в начальном состоянии, т.е. $\hat{q}^*=\hat{q}(0)$, где $\hat{q}(0)$ – количество ресурса в вершине $\hat{x}$ в момент времени $t=0$, а $\hat{q}^*$ – его величина в предельном состоянии.

Каждый сток в предельном состоянии имеет величину ресурса равную суммарному ресурсу, приходящему в сток за некоторое конечное число шагов.

Отметим что, каждая компонента H_j является связной подсетью вспомогательной сети G', порождённой множеством $X'_j\subset X'$, состоящей, из нескольких (не менее одной) компонент сильной связности H_j^p.

Рассмотрим компоненту H_0 – компонента сильной связности, порождённая множеством вершин k-ого уровня вентильности вспомогательной сети G'.

Отметим что, после конечного число тактов компонента H_0 собирает ресурс, суммарной величины W_0 ($0\le W_0\le W$), который в предельном состоянии будет распределяться только по её вершинам. Поскольку компонента H_0 изоморфна G, значит, пороговое значение T_0 компоненты H_0 является величиной порогового значения $T_{без}$ исходной сети $G(X,U,f)$ без ограничения на достижимость. Величина $T_0 = T_{без}$ компоненты H_0 может быть найдена применением метода, описанного в работе [12].

Рассмотрим вопрос о существовании единственного предельного состояния вспомогательной сети G'. Выделим три случая в зависимости от величины суммарного ресурса W_0, который будет распределяться между вершинами компоненты H_0 в предельном состоянии.

Первый случай, если $W_0 \geq T_0$.

Поскольку каждой дуге $u \in U_l$ исходной сети соответствует последовательность дуг u^l, u^{l+1}, …, u^k на вспомогательной сети, и в любой момент времени t суммарная величина ресурсных потоков, проходящих по дугам u^l, u^{l+1}, …, u^k не может превышать величины пропускной способности дуги u, значит, в предельном состоянии выполняется $F^*(u^l) + F^*(u^{l+1}) + \ldots + F^*(u^k) \leq r(u)$.

Отметим что, при условии $W_0 \geq T_0$ существует и единственно предельное состояние для отдельно взятой компоненты сильной связности H_0 (см. [5], [11]) и допустим что, существует хотя бы одна компонента сильной связности H' нижних уровнях, не имеющая единственного предельного состояния. Это означает что, предельные потоки циркулируют в компоненте H' с некоторым периодом больше единицы. Отсюда получим что, предельные потоки и в компоненте H_0 должны циркулировать с тем же периодом, следовательно, в компоненте H_0 также не существует единственного предельного состояния. Получили противоречие. Таким образом, при условии $W_0 \geq T_0$ для всей вспомогательной сети существует единственное предельное состояние при любых величинах суммарных ресурсов для всех компонент сильной связности нижних уровней.

Второй случай, если $0 < W_0 < T_0$.

Для дальнейшего изложения введём отношение частичного порядка на множестве компонент сильной связности вспомогательной сети:

Будем считать, что компонента сильной связности H_0 является компонентой нулевого порядка. Далее удаляем все вершины компоненты H_0, а также все вершины, из которых достижима компонента H_0. В результате получим подсеть вспомогательной сети G', и для нее определяем все «верхние» компоненты сильной связности, назовем их компонентами первого порядка. И так далее. Продолжаем процесс до тех пор, пока не будут удалены все вершины вспомогательной сети.

Отметим, что после конечного число тактов каждая компонента сильной связности H вспомогательной сети G' собирает величину суммарного ресурса $0 \le W(H) \le W$, которую будет распределяться на нее в предельном состоянии, а нахождение порогового значения $T(H)$ компоненты H может быть найдено как в работах [11] и [12].

Определения 4. *Две компоненты сильной связности H_i и H_j вспомогательной сети G' будем называть связанными, если на них существуют хотя бы две дуги $u_1 \in H_i$ и $u_2 \in H_j$, которые соответствуют одной дуге исходной сети.*

Введём в рассмотрение множество $\psi(H)$ – множество компонент, следующего порядка, связанных с компонентой H.

Определим величину $\widetilde{W} = W_0 + \theta(H_0)$, где

$$\theta(H) = \begin{cases} 0, & \psi(H) = \varnothing; \\ \sum\limits_{H' \in \psi(H)} \min\{T(H'), W(H') + \theta(H')\}, & \psi(H) \ne \varnothing. \end{cases}$$

здесь $T(H')$ и $W(H')$ – соответственно пороговое значение и суммарная величина ресурса для компоненты H'.

Для величин $\widetilde{W}$ и T_0 в сети с вентильной достижимостью возможны следующие ситуации:

- если $\widetilde{W} \geq T_0$, то предельное состояние на вспомогательной сети существует и единственно (см. [5], [8], [11]), при этом для $\widetilde{W} > T_0$ предельное состояние существует, и оно не зависит от начального состояния в том и только в том случае, когда на каждой компоненте сильной связности вспомогательной сети существует единственный потенциальный аттрактор. В противном случае распределение ресурса сверх порогового значения $\widetilde{W} - T_0$ зависит от начального состояния на каждой компоненте сильной связности. В предельном состоянии каждая неаттрактивная вершина имеет величину ресурса, равную сумме входящих пропускных способностей, а аттрактивные вершины собирают все «лишние» ресурсы в данной компоненте сильной связности;

- если $\widetilde{W} < T_0$, то существование единственного предельного состояния на вспомогательной сети зависит от начального состояния (см. [1], [11]).

Третий случай, если $W_0 = 0$.

В данном случае удаляем все вершины компоненты нулевого порядка H_0, а также все вершины, из которых достижима компонента H_0, и разобьем вспомогательную сеть на несколько частей относительно компонент первого порядка. Вопрос существования единственного предельного состояния будем исследовать по только что описанным правилам для каждой такой части в отдельности.

Литература

1. Жилякова Л.Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах // Управление

большими системами. 2013. № 43. С. 34-54.

2. Zhilyakova L.Yu. Asymmetric resource networks. I. Stabilization processes for low resources // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 72, No 4. pp. 798-807.

3. Zhilyakova L.Yu. Asymmetric resource networks. II. Flows for large rosource and their stabilization // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, No 6. pp. 1016-1028.

4. Zhilyakova L.Yu. Asymmetric resource networks. III. A study of limit states // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, No 7. pp. 1165-1172.

5. Жилякова Л.Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы // Управление большими системами. 2013. № 45. С. 6-29.

6. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А. Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003. № 2. С. 3-5.

7. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. 195 с.

8. Абдулрахман Х., Скороходов В.А. Ресурсные сети с магнитной достижимостью // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 4. С. 4-10.

9. Ерусалимский, Я.М. Графы с затуханием на дугах и усилением в вершинах и маршрутизация в информационных сетях // Инженерный вестник Дона. 2015. №.1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2782/.

10. Орлов В.В. О заполнении вершин ориентированного графа // Инженерный вестник Дона. 2017. №.4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4574.

11. Скороходов В.А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети // Управление большими системами. Выпуск 63. М.: ИПУ РАН. 2016. С. 6-23.

12. Skorohodov V.A., Chebotareva A.S. Maximum flow problem in a network with special conditions of flow distribution // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2015. Vol. 22, No 3. pp. 55-74.

References

1. Zhilyakova L.Yu. Upravlenie bol'shimi sistemami, 2013. № 43. pp. 34-54.

2. Zhilyakova L.Yu. Automation and Remote Control. 2012. Vol. 72, No 4. pp. 798-807.

3. Zhilyakova L.Yu. Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, No 6. pp. 1016-1028.

4. Zhilyakova L.Yu. Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, No 7. PP. 1165-1172.

5. Zhilyakova L.Yu. Upravlenie bol'shimi sistemami. 2013. № 45. pp. 6-29.

6. Erusalimskij Ya.M., Skorokhodov V.A. Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki. 2003. No 2. pp. 3-5.

7. Erusalimskij Ya.M., Skorokhodov V.A., Kuzminova M.V., Petrosyan A.G. Grafy s nestandartnoi dostizhimost'yu: zadachi, prilozheniya [Graphs with nonstandard reachability: tasks, applications]. Rostov-na-Donu: Yuzhnyi federal'nyi universitet, 2009. 195p.

8. Abdulrahman H., Skorokhodov V.A. Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki. 2016. No 4. pp. 4-10.

9. Erusalimskij Ya.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2782/.

10. Orlov V.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4574/.

11. Skorokhodov V.A. Upravlenie bol'shimi sistemami. Vypusk 63. M: IPU RAN, 2016. pp. 6-23

12. Skorohodov V.A., Chebotareva A.S. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2015. Vol. 22, No 3. pp. 55-74.