

## Построение кинематических линейчатых поверхностей на основе геометрической модели комплексного движения для внутреннего обкатывания в паре однополостных гиперboloидов вращения

Г.С. Рачковская

Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону

**Аннотация:** Разработанная ранее геометрическая модель “комплексного движения” для контактирующих пар однополостных гиперboloидов вращения, как методическая основа построения новых кинематических линейчатых поверхностей, распространена в настоящем исследовании на случай внутреннего обкатывания одного аксоида другим. Для геометрической модели “комплексного движения”, как комбинации нескольких согласованных между собой движений, разработано аналитическое описание генерируемых в рамках этой модели кинематических линейчатых поверхностей. Рассмотрены два варианта взаимного расположения подвижного и неподвижного аксоидов. В первом варианте подвижный аксоид расположен внутри неподвижного (при этом внешняя поверхность подвижного аксоида обкатывает внутреннюю поверхность неподвижного). Во втором варианте, наоборот, неподвижный аксоид расположен внутри подвижного и, соответственно, внешняя поверхность неподвижного аксоида обкатывается внутренней поверхностью подвижного аксоида. С помощью ранее разработанного приложения “ArtMathGraph” выполнена компьютерная графика построенных кинематических линейчатых поверхностей.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, аналитическая геометрия, кинематическая линейчатая поверхность, компьютерная графика.

Успехи математического моделирования аналитических поверхностей систематизированы в “Энциклопедии аналитических поверхностей” [1], включившей в себя класс технологически востребованных линейчатых поверхностей [1-3]. Поиск новых геометрических моделей построения аналитических поверхностей относится к одной из актуальных задач аналитической геометрии линейчатых поверхностей [1-3], включая прикладные аспекты в строительстве и архитектуре [4, 5]. Расширение возможности моделирования новых линейчатых поверхностей связано с построением кинематических поверхностей [6,7]. Кинематические линейчатые поверхности формируются движением выделенной прямолинейной образующей одной (подвижной) линейчатой поверхности в процессе её перемещения относительно другой (неподвижной) линейчатой поверхности при условии, что в данном процессе эти поверхности в каждый

---

момент времени соприкасаются по единой общей для них прямолинейной образующей [7-9]. Этому условию контактирования поверхностей удовлетворяет, например, модель качения одного аксоида по другому в парах “цилиндр – цилиндр” или “конус – конус” [7]. Однако, для пары однополостных гиперболоидов вращения приведенному условию удовлетворяет, как установлено ранее [8, 9], геометрическая модель “комплексного движения”, включающего комбинацию нескольких согласованных между собой движений. Модель “комплексного движения” для случая внешнего обкатывания одного однополостного гиперболоида вращения другим, т.е. обкатывания внешней поверхности неподвижного аксоида внешней поверхностью подвижного, изучена ранее [8, 9]. Геометрическая модель внутреннего обкатывания одного однополостного гиперболоида вращения другим, рассмотренная в данной работе, включает в себя два варианта взаимного расположения подвижного и неподвижного аксоидов и, как следствие, два варианта генерируемых кинематических поверхностей. В первом варианте (А) подвижный аксоид расположен внутри неподвижного, внутренняя поверхность которого обкатывается внешней поверхностью подвижного, а во втором варианте (Б) неподвижный аксоид расположен внутри подвижного и внешняя поверхность неподвижного аксоида обкатывается внутренней поверхностью подвижного (рис. 1).

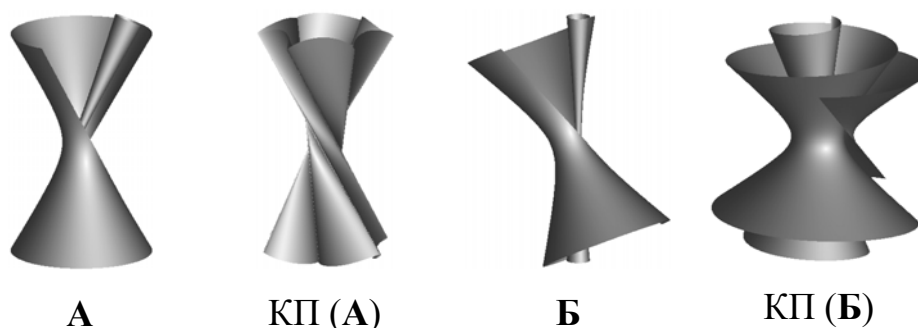


Рис. 1. Пары однополостных гиперболоидов вращения (в вариантах А и Б) и соответствующие кинематические поверхности (КП (А) и КП (Б)).  
(На рисунке оси неподвижных аксоидов в вариантах А и Б вертикальные.)

Модель *комплексного движения* одного аксоида относительно другого для пары однополостных гиперboloидов вращения (рис. 1) может быть представлена в виде суперпозиции трёх согласованных движений [8, 9]:

- (1) вращение подвижного аксоида вокруг своей оси, совпадающей с осью  $OZ$  подвижной системы координат  $OXYZ$ , связанной с подвижным аксоидом **2**;
- (2) вращение оси подвижного аксоида **2** вокруг оси неподвижного аксоида **1**, совпадающей с осью  $oz$  неподвижной системы координат  $oxuz$ , связанной с неподвижным аксоидом **1**;
- (3) смещение подвижного (**2**) относительно неподвижного (**1**) аксоида вдоль общей для обоих аксоидов прямолинейной образующей.

Начала неподвижной ( $oxuz$ ) и подвижной ( $OXYZ$ ) систем координат расположены в центрах горловых окружностей неподвижного (**1**) и подвижного (**2**) однополостных гиперboloидов вращения, соответственно.

Согласно геометрической модели *комплексного движения* для пары неодинаковых контактирующих однополостных гиперboloидов вращения должно выполняться параметрическое условие [9]:

$$a_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + c_2^2,$$

где  $a_1$ ,  $c_1$  и  $a_2$ ,  $c_2$  – параметры канонического уравнения поверхности, соответственно, для неподвижного (**1**) и подвижного (**2**) аксоидов.

Каноническое уравнение поверхности однополостного гиперboloида вращения выглядит следующим образом [7]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{где } a \text{ – радиус горловой окружности.}$$

В результате *комплексного движения* одного однополостного гиперboloида вращения относительно другого, одна из прямолинейных образующих подвижного аксоида генерирует кинематическую поверхность, параметрическое задание которой в неподвижной системе координат  $oxuz$ :

---

$$x = (Z \sin \theta + X \cos \theta) \cos u - (Y + a_1 - a_2) \sin u;$$

$$y = (Z \sin \theta + X \cos \theta) \sin u + (Y + a_1 - a_2) \cos u;$$

$$z = Z \cos \theta - X \sin \theta, \text{ где}$$

$$X = -a_2 \sin \varphi + a_2 v \cos \varphi; Y = a_2 \cos \varphi + a_2 v \sin \varphi; Z = c_2 v;$$

$$\theta = \operatorname{arctg}(a_1 / c_1) - \operatorname{arctg}(a_2 / c_2).$$

Для геометрической модели внутреннего обкатывания:  $\varphi = -(a_1 / a_2) u$ .

На рис. 1 дважды изображена одна и та же согласованная по параметрам  $a_1$ ,  $c_1$  и  $a_2$ ,  $c_2$  пара контактирующих однополостных гиперboloидов вращения, но с разным взаимным расположением неподвижного (1) и подвижного (2) аксоидов. Подвижным в варианте А является внутренний аксоид ( $(a_1 / a_2) = 6/1$ ), а в варианте Б подвижным является внешний аксоид ( $(a_1 / a_2) = 1/6$ ), что, судя по рис. 1, приводит к совершенно разным кинематическим поверхностям КП (А) и КП (Б).

Таким образом, для двух вариантов геометрической модели *комплексного движения* при внутреннем обкатывании одного аксоида другим в парах контактирующих однополостных гиперboloидов вращения разработано аналитическое описание и проведена компьютерная визуализация построенных кинематических линейчатых поверхностей. Благодаря параметрической зависимости генерируемых кинематических поверхностей от исходных линейчатых поверхностей контактирующих аксоидов обеспечивается разнообразие результирующих линейчатых поверхностей. Предложенная геометрическая модель для внутреннего обкатывания одного однополостного гиперboloида вращения другим в сочетании с графическими возможностями разработанного ранее приложения “ArtMathGraph” расширяет зону компьютерного моделирования технологически востребованных линейчатых поверхностей.

## Литература

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer, 2015. 752 p.
  2. Peternell M., Pottmann H., Ravani B. On the computational geometry of ruled surfaces // Computer-Aided Design. 1999. V. 31. pp. 17-32.
  3. Odehnal B. Subdivision Algorithms for Ruled Surfaces // Journal for Geometry and Graphics. 2008. V. 12. №1. pp. 1-18.
  4. Flöry S., Pottmann H. Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture // Advances in Architectural Geometry. 2010. pp. 103-109.
  5. Pottmann H., Eigensatz M., Vaxman A., Wallner J. Architectural Geometry // Computers & Graphics. 2015. V. 47. pp. 145-164.
  6. Sprott K., Ravani B. Kinematic generation of ruled surfaces // Advanced in Computational Mathematics. 2002. V. 17. pp. 115-133.
  7. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. Москва: Наука, 2006. 536 с.
  8. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. Kinematic ruled surfaces (one-sheet hyperboloid of revolution as fixed and moving axoids) // Proceedings of the 13th Conference on Geometry and Graphics. Dresden, Germany. 2008. pp. 190-191.
  9. Рачковская Г.С. Математическое моделирование кинематических поверхностей на основе однополостного гиперболоида вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов // Инженерный вестник Дона, 2013, №1 URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1499/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1499/).
  10. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. The new software application “ArtMathGraph” // Proceedings of the 15-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics. Plzen, Czech Republic. 2007. pp. 29-32.
  11. Рачковская Г.С. Математическое моделирование и компьютерная визуализация сложных геометрических форм // Инженерный вестник Дона, 2013, №1 URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1498/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1498/).
-

## References

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer, 2015. 752 p.
2. Peternell M., Pottmann H., Ravani B. On the computational geometry of ruled surfaces. *Computer-Aided Design*. 1999. V. 31. pp. 17-32.
3. Odehnal B. Subdivision Algorithms for Ruled Surfaces. *Journal for Geometry and Graphics*. 2008. V. 12. №1. pp. 1-18.
4. Flöry S., Pottmann H. Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture. *Advances in Architectural Geometry*. 2010. pp. 103-109.
5. Pottmann H., Eigensatz M., Vaxman A., Wallner J. *Architectural Geometry*. *Computers & Graphics*. 2015. V. 47. pp. 145-164.
6. Sprott K., Ravani B. Kinematic generation of ruled surfaces. *Advanced in Computational Mathematics*. 2002. V. 17. pp. 115-133.
7. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. *Analiticheskie poverchnosti (Rus), [Analytical Surfaces]*. Moscow: Nauka, 2006. 536 p.
8. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. Kinematic ruled surfaces (one-sheet hyperboloid of revolution as fixed and moving axoids). *Proceedings of the 13th Conference on Geometry and Graphics*. Dresden, Germany. 2008. pp. 190-191.
9. Rachkovskaya G.S. *Inzhenernyj vestnik Dona (Rus)*, 2013, №1 URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1499/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1499/).
10. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. The new software application “ArtMathGraph”. *Proceedings of the 15-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics*. Plzen, Czech Republic. 2007. pp. 29-32.
11. Rachkovskaya G.S. *Inzhenernyj vestnik Dona (Rus)*, 2013, №1 URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1498/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1498/).