

## Исследование синхронизации почти-пропорциональных и почти-периодических характеристик временных рядов

*И.Н. Староверов, В.И. Кузьмин, И.В. Есинов*

*МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва*

**Аннотация.** В данном исследовании проведен анализ временного ряда с использованием класса сдвиговых функций для арифметических и геометрических прогрессий, а также их синхронизации с использованием логарифмического декремента. В качестве рассматриваемых данных были взяты стоимость акций компании IBM на закрытии, каждый торговый день. С помощью сдвиговых функций геометрических и арифметических прогрессий были обнаружены почти-пропорции и почти-периоды в рассматриваемых данных. Эти обнаруженные паттерны подчеркивают важность применения сдвиговых функций для анализа временных рядов, позволяя выделить внутренние закономерности и периодические колебания, которые могли бы остаться незамеченными при стандартных методах анализа. Вычисление минимумов и соответствующих значений геометрической прогрессии дали возможность определить почти-периоды в данных. Эти результаты не только подтвердили визуальные наблюдения, но и улучшили наше понимание внутренних закономерностей временного ряда. Полученные выводы подчеркивают эффективность применения методов анализа временных рядов на основе почти-пропорций и почти-периодов. Эти подходы играют ключевую роль в выявлении скрытых паттернов и незаметных периодичностей в данных, что является фундаментальным условием для более точного анализа и успешного прогнозирования.

**Ключевые слова:** почти-пропорции, синхронизация геометрической прогрессии, эмпирические данные, геометрическая прогрессия, сдвиговые функции.

### Введение

В современном мире объем информации постоянно увеличивается, что создает сложности в эффективном анализе нелинейных колебаний с трендами в данных, которые остаются структурно устойчивыми [1]. Эмпирические данные возникают в результате взаимодействия процессов на различных уровнях, что требует их разбиения на компоненты, отражающие быстрые и медленные движения [2-4]. Анализ быстрых движений позволяет выявить иерархии интервалов, близких к периодам, что позволяет выделить критические уровни, радикально изменяющие структуру данных [5, 6].

Анализ медленных движений, отражающих основные тенденции, осуществляется с использованием нелинейных преобразований, таких как

анаморфозы, которые преобразуют исходные данные в кусочно-линейные зависимости. Путем сравнения характеристик почти-периодов и трендов можно выявить общую структуру временного ряда [7, 8]. Дополнительно, возникает задача идентификации почти-пропорций, которую можно решить при помощи алгоритмов, способных выявить эти пропорции, либо путем их реконструкции с использованием отношений почти-периодов [9, 10].

В этом исследовании рассмотрена синхронизация и взаимосвязи между почти-пропорциональными и почти-периодическими характеристиками во временных рядах, исследуя их практическое применение и раскрывая основные закономерности внутри почти-пропорций.

### Метод

Для обнаружения ритмов в геометрической прогрессии будем использовать соотношение:  $f(t * k) - f(t) = 0$ , где  $k$  – модуль геометрической прогрессии,  $f(t)$  – значение исследуемого ряда в момент времени  $t$ .

Если выполняется неравенство  $|f(t * k) - f(t)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — смещение, то число  $k$  будет являться "почти-пропорцией". Если у нас имеется  $N$  дискретных отсчетов функции  $f(t)$ , можем функцию для определения почти-пропорций. Эта функция примет следующий вид:

$$b(k) = \frac{k}{N} \sum_{t=1}^{N/k} |f(t \cdot k) - f(t)|,$$

где  $N$  – число точек исходного ряда;

$k$  – модуль геометрической прогрессии;

$t$  – время.

Для распознавания геометрической прогрессии критическую роль играет знание положения начального отсчёта, которое может находиться как внутри, так и за пределами исследуемых данных. Тогда формула для определения почти-пропорций будет иметь вид:

---

$$b(k, t_0) = \frac{k}{N} \sum_{t=1}^{N/k} |f(t \cdot k + t_0) - f(t + t_0)| \quad (1)$$

Здесь система почти-пропорций  $k$  функции  $f(t)$  может быть выявлена путём определения локальных минимумов на графике этой функции. Чем глубже эти минимумы проявляются, тем ближе соответствующие временные интервалы к реальному значению модуля геометрической прогрессии. Это также поднимает степень их важности в рассматриваемом временном ряде.

Для обоснования согласования геометрической и арифметической прогрессии в анализе временных рядов рассмотрим такое понятие как логарифмический декремент и его интерпретацию в контексте конкретной задачи. Это позволяет понимать характер изменений в данных и принимать соответствующие решения при анализе и прогнозировании временных рядов [11].

Формула представляет собой определение логарифмического декремента в контексте анализа колебаний или временных рядов.

$$\frac{X_{k+1} - X_k}{X_k - X_{k-1}} = D, \quad (2)$$

где  $X_k$  — амплитуда (или значение) на  $k$ -ом шаге (или в  $k$ -ой точке времени).

$X_{k+1}$  — амплитуда на следующем ( $k+1$ ) шаге.

$X_{k-1}$  — амплитуда на предыдущем ( $k-1$ ) шаге.

$D$  — логарифмический декремент, который представляет собой отношение между амплитудами последовательных колебаний.

Она используется для определения затухания амплитуды колебаний между последовательными точками данных во времени или в пространстве.

Можно использовать логарифмический декремент для анализа динамики системы или временного ряда, чтобы определить, как система реагирует на внешние воздействия или как, изменяются значения во времени.

Формула (2) позволяет оценить, как быстро затухают колебания в системе. Поэтому этот параметр часто используется для оценки затухания колебаний. Большие значения  $D$  указывают на медленное затухание, в то время как малые значения  $D$  указывают на быстрое затухание. Если  $D$  меньше 1, это означает затухание колебаний. Если  $D$  равно 1, это означает отсутствие затухания (система колеблется с постоянной амплитудой).

Если  $D = 2$ , это означает, что амплитуда колебаний уменьшается вдвое на каждом последующем шаге. Это означает, что амплитуда колебаний уменьшается примерно в 2.72 раза (по числу "e", основанию натурального логарифма) на каждом последующем периоде.

В контексте анализа временных рядов,  $D = 2$  означает, что каждый последующий отсчет во временном ряду вдвое меньше предыдущего отсчета. Это говорит о экспоненциальном затухании амплитуды во временном ряду. Каждый следующий элемент данных в ряду составляет около половины предыдущего элемента.

Обратимся к уравнению (2), из которого получается соответствующее разностное уравнение:

$$X_{k+1} - (D + 1)X_k + DX_{k-1} = 0.$$

Здесь  $X_k = \lambda^k$ , поэтому получаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - (D + 1)\lambda + D = 0$$

корни которого равны  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = D$ . В результате решение уравнения имеет вид:  $X_k = C_1 + C_2 D^k$ , где  $D$  — знаменатель геометрической прогрессии (декремент).

Рассмотрим обобщенный вариант декремента (2), учитывающий возможные характеристики процесса при состоянии  $X_{k-2}$ . Получим обобщенный декремент  $D_1$ , который определяется, как:

$$D_1 = \frac{X_{k+1} - X_k}{X_k - X_{k-2}}$$

---

Это позволяет согласовать элементы арифметической и геометрической прогрессий. В случае уравнения с обобщенным декрементом, соответствующее разностное уравнение имеет следующий вид:

$$X_{k+1} - (D_1 + 1)X_k + D_1X_{k-2} = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - (D_1 + 1)\lambda^2 + D_1 = 0.$$

Откуда решение характеристического уравнения будет иметь вид:

$$X_k = (C_1 + C_2\lambda_2^k) + C_3\lambda_3^k = 0,$$

где значения лямбд будет равно:

$$\lambda_2 = \frac{D_1}{2} + \sqrt{\frac{D_1^2 + 4D_1}{4}} \quad \text{и} \quad \lambda_3 = \frac{D_1}{2} - \sqrt{\frac{D_1^2 + 4D_1}{4}}.$$

Интервал  $X_{k+1} - X_{k-2} = T_k$  принимаем за единицу. Тогда  $X_{k+1}(1 - \frac{1}{\lambda}) = D_1 T_k$  и  $X_k = \frac{\lambda(D_1) - 1}{\lambda - 1} T_k$ . Это соотношение определяет связь между членами арифметической прогрессии с разностью  $T_k$  и геометрической прогрессии со знаменателем  $\lambda$ .

При  $D_1 = 2$ ,  $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$ , положительный корень  $\lambda = 1 + \sqrt{3} = 2.7320\dots$ , близок к  $e = 2.71828\dots$  (число Непера), поэтому разностное уравнение принимает вид:

$$X_{k+1} = 2(X_k + X_{k-1})$$

и устанавливается связь между равномерными интервалами 1-го уровня и членами геометрической прогрессии 2-го уровня:

$$X_{k+1} = \frac{2e}{e - 1} T_k \approx 3.164 T_k \quad (3)$$

Используя данное соотношение можно получить синхронизацию  $T_k$  и  $X_k$  (рис.1). Рубеж  $e^e$  имеет ключевое значение. Между критической константой 3-го уровня  $e^e$  и рубежом  $e^3$  находится зона, где системы меняют структуру – фаза перестройки (рис.1).

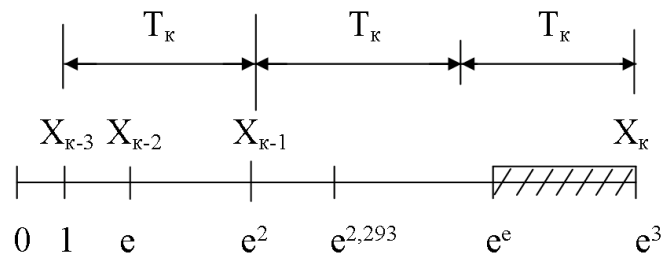


Рис. 1. – Синхронизация  $T_k$  и  $X_k$

Для определения почти-периодов можем использовать сдвиговые функции, основанные на метриках функционального анализа. Метрики определяются, как:

$$\rho(x, y) = \sqrt[2n]{\sum_{t=1}^n (x_t - y_t)^{2n}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\rho_p(x, y) = (\sum_{t=1}^n (|x_t - y_t|^p)^{\frac{1}{p}}, p = 1, 2, 3, \dots$$

где  $\rho(x, y)$  – расстояние между  $x$  и  $y$ ;  $n, p$  – параметры.

Задача заключается в поиске минимального расстояния между функциями в метрическом пространстве. Для определения почти-периодов рассматривается класс сдвиговых функций, основанных на этих метриках.

$$\rho(\tau) = \sqrt[2n]{\sum_{t=1}^{n-\tau} ((f(t+\tau) - f(t))^{2n}), n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\rho_p(\tau) = (\sum_{t=1}^{n-\tau} |f(t+\tau) - f(t)|^p)^{\frac{1}{p}}, p = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

где  $\tau$  – сдвигка во времени;  $n, p$  – параметры.

Важно отметить, что анализ временных рядов может быть сложной задачей, особенно, когда ряды содержат шум и различные нелинейные факторы. В этом контексте, использование сдвиговых функций и метрик может помочь выделить периодические или почти-периодические компоненты в данных.

Сдвиговые функции, представленные в уравнениях (4), позволяют измерить, насколько похожи значения временных рядов, с учетом сдвига по времени. Это позволяет выявить структуры, которые могут повторяться через

некоторый период времени. Например, если рассматриваем финансовый временной ряд, такие сдвиговые функции могут помочь выявить повторяющиеся паттерны, что важно для прогнозирования будущих изменений.

С использованием параметров  $n$  и  $r$ , мы можем настраивать чувствительность анализа к различным аспектам данных. Например, при использовании больших значений  $n$  и  $r$ , мы делаем анализ менее чувствительным к шуму, но более чувствительным к глубоким структурам в данных. Наоборот, меньшие значения  $n$  и  $r$  могут помочь выявить более краткосрочные и менее выраженные паттерны.

### Результаты и обсуждение

Рассмотрим суточные данные цены акций компании в период с 02.01.1962 по 29.09.2023 года [12]. В анализе используется временной ряд из 15.543 точек, представленный на графике (рис.2), где по оси  $x$  отмечены торговые дни, а по оси  $y$  указана цена акции в долларах, при условии, что один биржевой год составляет 252 дня.



Рис. 2. – Биржевые данные компании IBM

Для выявления почти-пропорций в представленных данных было проведено исследование с использованием сдвиговой функции. Согласно формуле (1), была построена сдвиговая функция, где значения  $K$  (знаменатель прогрессии) отложены по оси  $x$ , а начальные значения  $t_0$  – по оси  $y$ . На рис.3 изображен трехмерный график этой сдвиговой функции с параметром  $t_0$ , установленным на значение «101».

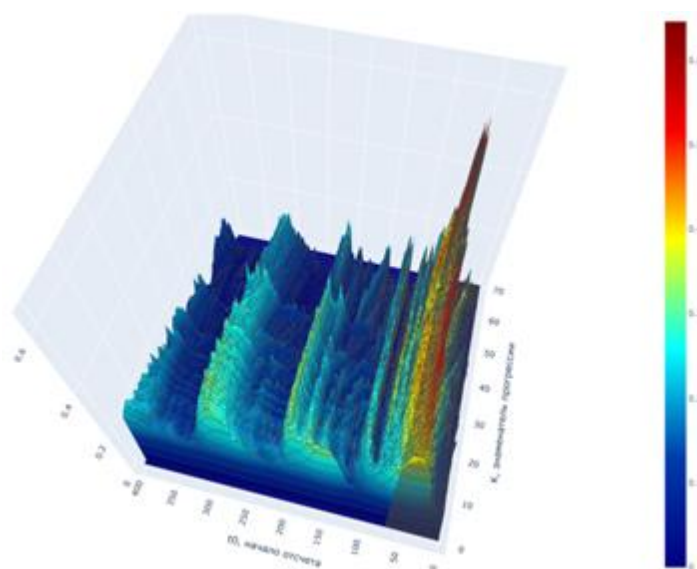


Рис. 3. – 3D график исследования сдвижки  $t_0$

На основании трехмерного графика (рис.3), было принято решение установить значение параметра  $t_0$  равным «101». Значения параметра  $t_0$  были отмечены на контурном графике (рис.4). Анализируя контурный график, можно заметить, что при значении  $t_0 = 101$  сформировался канал минимума.

Далее был выполнен анализ среза при  $t_0 = 101$  (рис.5), на котором были выделены два минимума: «16» и «41». Интересно, что отмеченные минимумы на рис.4 различаются приблизительно в  $e$  раз. Что будет показано в дальнейшем при рассмотрении различных значений параметра  $K$ .

Для визуализации почти-пропорций построили график с использованием параметров  $t_0$  и  $K$ , при этом оси графика имеют логарифмический масштаб. На рис.6 задали значение  $t_0$  равное 101, что устанавливает начальную точку для геометрической прогрессии.

---



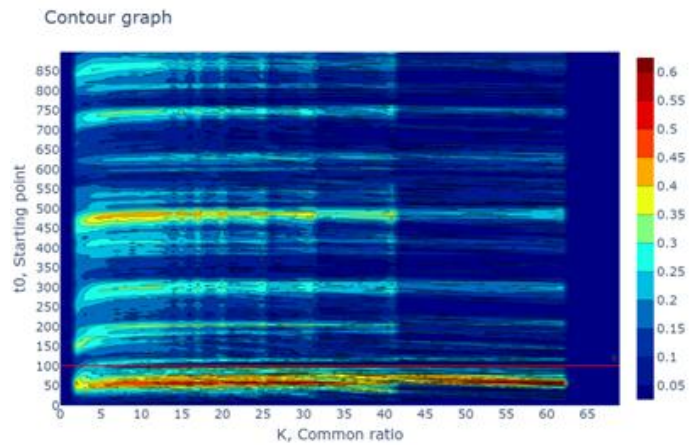


Рис. 4. – Определение сдвигки  $t_0$

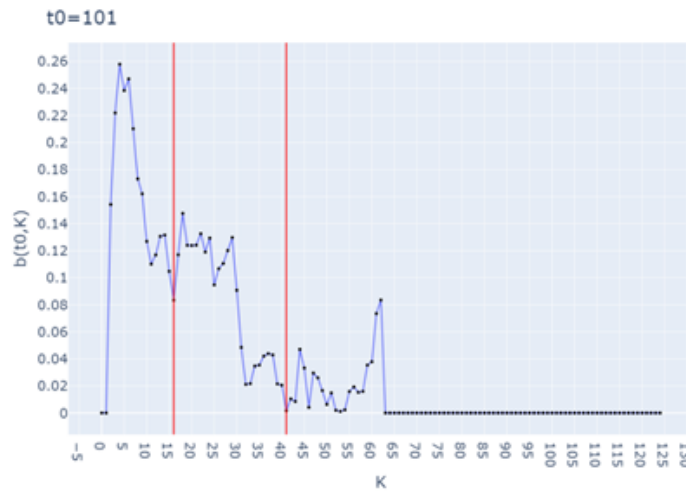


Рис. 5. – Срез по  $t_0 = 101$  для сдвиговой функций

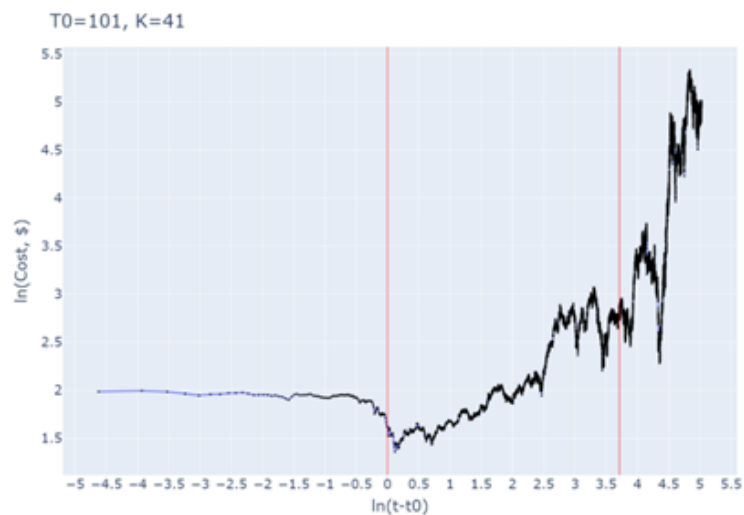


Рис. 6. – Почти-пропорции для параметров  $t_0 = 101$ ,  $K = 41$

Из графика видно, что при значении  $K$  равное 41 выходим за пределы исследуемого временного ряда. Для того чтобы прогрессия оставалась в пределах временного ряда, нам необходимо уменьшить значение  $K$  в  $e$  раз, что приблизительно равняется 16. Затем построим график с параметрами  $t_0 = 101$  и  $K = 16$  (рис.7). На этом графике видно, что значения прогрессии всё еще не полностью находятся в пределах исследуемого временного ряда. Уменьшили значение  $K = 16$  в  $e$  раз, получив новое значение  $K$ , приблизительно равное 6.



Рис. 7. – Почти-пропорции для параметров  $t_0 = 101$ ,  $K = 16$

Представленный график (рис.8) был создан с использованием параметров  $t_0 = 101$  и  $K = 6$ . На этом этапе прогрессия находится в пределах временного ряда, и с каждым уменьшением параметра  $K$  в  $e$  раз все точнее попадаем в значения минимумов. Уменьшив параметр  $K = 6$  еще в  $e$  раз, получаем новое значение  $K$ , приблизительно равное 2.

Наконец, построили график с параметрами  $t_0 = 101$  и  $K = 2$  (рис.9). На этом графике видно, что при таком значении  $K$ , геометрическая прогрессия отлично соответствует исследуемому временному ряду и равномерные такты попадают в минимумы.



Рис. 8. – Почти-пропорции для параметров  $t_0 = 101$ ,  $K = 6$



Рис. 9. – Почти-пропорции для параметров  $t_0 = 101$ ,  $K = 2$

Далее, более подробно рассмотрим модуль геометрической прогрессии  $K=16$ . В таком случае получим следующие соответствия (Табл. 1):

Таблица №1

Расчет значений геометрической прогрессии на разных уровнях  $X_k$

$X_{k-2}$	1(0)
$X_{k-1}$	$K(16)$
$X_k$	$K^2(256)$
$X_{k+1}$	$K^3(4096)$

Тогда, применяя соотношение (3), получим:

$$T_k = \frac{X_{k+1}}{3.164} = \frac{4096}{3.164} = 1295,$$

$$T_{k+1} = 1295 * e = 3520.$$

Используя соотношение (4), построим обобщенную сдвиговую функцию и отобразим результаты на контурном графике. Здесь выделяется полученный почти период, равный 3520 торговым дням (рис.10).

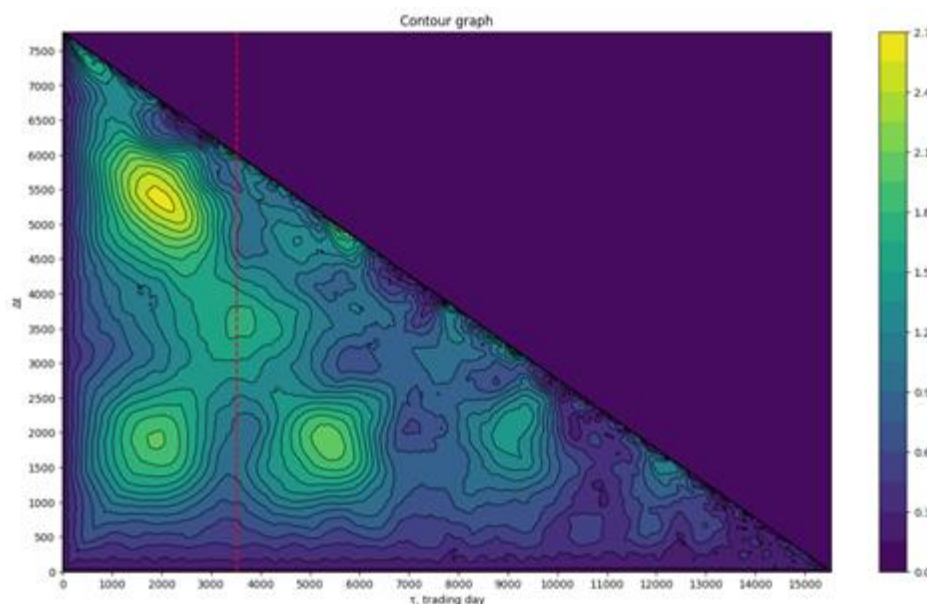


Рис. 10. – Контурный график сдвиговой функции

Обратим внимание, что эти значения соответствуют минимумам. Для более детального анализа создадим срезы обобщенной сдвиговой функции и отобразим их на графике ниже (рис.11). Также стоит отметить, что если умножить  $T_{k+1} = 3520$  на 2 и 3, то мы снова получим значения минимумов. Таким образом, будут получены почти-периоды со значениями 7040 и 10560 торговых дней.

Воспользуемся соотношением (3) и (рис.1), расставим критические константы в соответствии с полученными характеристиками (рис.12).

По рис.12 видно, что интервал от критической константы « $e$ » до « $e^3$ » (фаза перестройки) попадает на рост акций, после прохождения данного участка стоимость акций выходит на новый средний уровень.

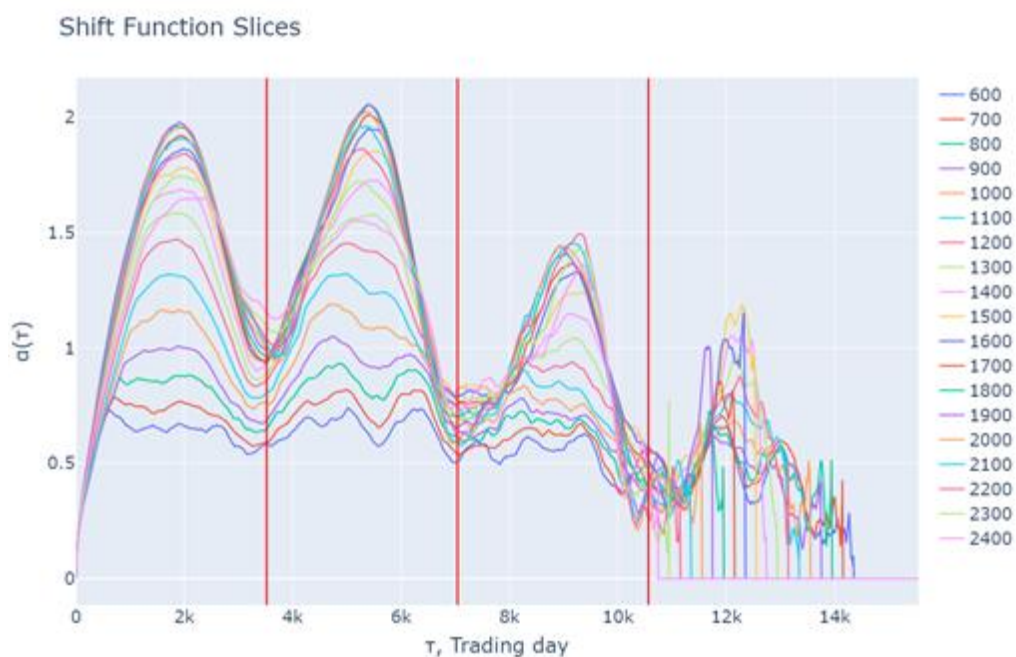


Рис. 11. – Срезы обобщенно-сдвиговой функции



Рис. 12. – Выставление критических рубежей на полулогарифмическом графике

Также заметим, что отрезки, соответствующие тактам  $T_k$ , попадают на локальные минимумы. Такты геометрической прогрессии аналогично совпадают с локальными минимумами и максимумами.

## Заключение

В проведенном исследовании был выполнен анализ временного ряда цен акций компании IBM с использованием методов анализа почти-пропорций и почти-периодов с помощью семейства сдвиговых функций, которые в свою очередь берут свое начало из функционального анализа. Применение логарифмического декремента, анализ сдвиговых функций и выявление почти-пропорций на более низком уровне позволили выделить скрытые закономерности в данных. Визуализация графиков и расчет значений геометрических прогрессий дали возможность определить почти-периоды, соответствующие визуальным минимумам.

## Литература

1. Максимов В.П. Методология численного эксперимента динамической модели подпокровного агрегата // Инженерный вестник Дона, 2012, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/780](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/780)
2. Жилин С.И. Нестатистические модели и методы построения и анализа зависимостей : дис. – Барнаул : [Алт. гос. техн. ун-т], 2004. 119 с.
3. Тестов В.А. Дискретность и непрерывность в математике // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2010. №12. С. 36-45.
4. Мощенко И.Н. Имитационное моделирование этнополитической ситуации ЮГА РОССИИ на основе теории динамических систем // Инженерный вестник Дона, 2010, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/216](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/216)
5. Рубаков С. В. Современные методы анализа данных // Управление наукой и наукометрия. 2008. №7. С. 165-176.
6. Кузьмин В.И., Самохин А.Б. Почти периодические функции с трендом // Вестник МГТУ МИРЭА. 2015. №4-2. С. 105-107.



7. Gabale A.P., Sinha S.C. A direct analysis of nonlinear systems with external periodic excitations via normal forms // *Nonlinear Dynamics*. 2009. Т. 55. С. 79-93.
8. Kucharavy D., Damand D., Barth M. Technological forecasting using mixed methods approach // *International Journal of Production Research*. 2023. Т. 61. №16. С. 5411-5435.
9. Староверов И.Н., Кузьмин В.И. Анализ почти-пропорциональных характеристик временных рядов на основе класса сдвиговых функций // *Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики. Серия Естественные и Технические Науки*. 2023. №01. URL: [nauteh-journal.ru/index.php/3/2023/%E2%84%9601](http://nauteh-journal.ru/index.php/3/2023/%E2%84%9601)
10. Kuzmin V., Gadzaov A., Dzerjinsky R. *Methods for data analysis*. М.: Перо, 2021. 243 с.
11. Менделеев Д.И. *Сочинения*. Т. XXII. Л.-М.: АН СССР, 1950. 848 с.
12. International Business Machines Corporation (IBM). NYSE - Nasdaq Real Time Price. URL: [finance.yahoo.com/quote/IBM/history?p=IBM](http://finance.yahoo.com/quote/IBM/history?p=IBM) (дата обращения 01.10.2023).

### References

1. Maksimov V.P. *Inzhenernyj vestnik Dona*, 2012, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/780](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/780)
2. Zhilin S.I. *Nestatisticheskie modeli i metody postroeniya i analiza zavisimostey [Non-statistical models and methods for constructing and analyzing dependencies]* : dis. Barnaul : Alt. gos. tekhn. un-t, 2004. 119 p.
3. Testov V.A. *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*. 2010. №12. pp. 36-45.
4. Moshchenko I.N. *Inzhenernyj vestnik Dona*, 2010, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/216](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/216)



5. Rubakov S.V. Upravlenie naukoj i naukometriya. 2008. №7. pp. 165-176.
6. Kuz'min V.I., Samokhin A.B. Vestnik MGTU MIREA. 2015. №4-2. pp. 105-107.
7. Gabale A.P., Sinha S.C. Nonlinear Dynamics. 2009. V. 55. pp. 79-93.
8. Kucharavy D., Damand D., Barth M. International Journal of Production Research. 2023. V. 61. №16. pp. 5411-5435.
9. Staroverov I.N., Kuz'min V.I. Sovremennaya nauka: Aktual'nye problemy teorii i praktiki. Seriya Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki. 2023. №01. URL: [nauteh-journal.ru/index.php/3/2023/%E2%84%9601](http://nauteh-journal.ru/index.php/3/2023/%E2%84%9601)
10. Kuzmin V., Gadzaov A., Dzerjinsky R. Methods for data analysis. M.: Pero, 2021. 243 p.
11. Mendeleev D.I. Sochineniya [Essays]. T. XXII. L.-M.: AN SSSR, 1950. 848 p.
12. International Business Machines Corporation (IBM). NYSE - Nasdaq Real Time Price. URL: [finance.yahoo.com/quote/IBM/history?p=IBM](http://finance.yahoo.com/quote/IBM/history?p=IBM) (accessed 01.10.2023).