Достаточное условие квазикорректности смешанного краевого условия для поверхностей второго порядка

Н.Н. Солохин

В работах [1] и [2] впервые был изучен вопрос о квазикорректности внешней связи вида

$$R(\vec{U}) = \gamma \qquad (1),$$

где R - однородный аддитивный оператор, $\vec{U}$ - векторное поле смещения при бесконечно малом изгибании поверхности, γ - известная функция.

В работе [3] наряду с общими результатами была рассмотрена реализация такой внешней связи для поверхностей второго порядка.

Следующим этапом явилось изучение квазикорректности внешней связи (краевого условия) смешанного типа:

$$\alpha(\vec{U}\vec{l}) + \beta(\vec{V}\vec{L}) = \sigma \qquad (2),$$

где $\vec{U}$ и $\vec{V}$ – векторные поля смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, $\vec{l}$ и $\vec{L}$ – векторные поля, заданные вдоль края поверхности, α, β, σ – некоторые функции, заданные вдоль границы поверхности.

В этом направлении было получено ряд теорем, представляющих немаловажный интерес в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей. Рассмотрение реализаций этих общих теорем для поверхностей второго порядка дало более широкую и глубокую картину распределения собственных векторных полей краевого условия смешанного типа. В частности были рассмотрены сферические сегменты и сечения параболоида вращения и дана картина распределения собственных векторных полей в таких сечениях.

Краевое условие (2) назовём квазикорректным с p степенями свободы, если однородное условие ($\sigma = 0$) совместимо с p линейно независимыми бесконечно малыми изгибаниями поверхности S, а неоднородное условие совместимо с бесконечно малыми изгибаниями для любой функции σ. Векторные поля $\vec{l}$ и $\vec{L}$ назовём собственными, если условие (2) не является квазикорректным [1, с.152].

Пусть $S \in C^{3,\mu}$, $0<\mu<1$ – односвязная поверхность второго порядка положительной кривизны $K \geq K_0 > 0$ с краем $\partial S \in C^{2,\mu}$, $0<\mu<1$. Пусть далее на границе ∂S поверхности S заданы вещественные функции a, b и c и векторное поле $\vec{l}$ класса $C^{1,\mu}$, $0<\mu<1$. Считаем, что векторное поле $\vec{l}$ не принадлежит поверхности. В настоящей работе рассматривается случай, когда $\vec{L}=\vec{n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности.

Рассмотрим внешнюю связь

$$a\left(\vec{U}\vec{l}\right)+b\left(\vec{V}\vec{n}\right)=c \tag{3}$$

Пусть $\vec{t}$ – единичный касательный к краю ∂S вектор; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали поверхности S, $\vec{\eta}=[\vec{t}\vec{n}]$ – тангенциальная нормаль.

Таким образом, вдоль края ∂S поверхности мы имеем подвижный репер $\{\vec{t},\vec{n},\vec{\eta}\}$ и некоторое поле $\vec{l}=\vec{l}(s)$ класса $C^{1,\mu}$, $0<\mu<1$. Пусть $\vec{l}_\tau$ – проекция $\vec{l}$ на касательную к S плоскость. Считаем также, что векторное поле $\vec{l}_\tau$ не касательно к границе поверхности в каждой точке края. Обозначим $\beta=\beta(s)$ – угол между $\vec{\eta}$ и $\vec{l}_\tau$, где отсчет производится в положительном направлении, если смотреть со стороны вектора $\vec{n}$. Обозначим угол между $\vec{l}_\tau$ и $\vec{l}$ через α, считая, что отсчёт производим от $\vec{l}_\tau$ до $\vec{l}$ против хода часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{t}$. В таких обозначениях векторное поле $\vec{l}$ однозначно определяется заданием углов $\alpha=\alpha(s)$ и $\beta=\beta(s)$ как функций длины дуги контура.

Теорема. *Пусть вдоль края* ∂S *задано семейство векторных полей* $\vec{l}_\alpha(s)$, *определяемых углами* $\alpha(s)$ *и* $\beta_0(s)$, *где* $\beta_0(s)$ *– фиксированная функция из интервала* $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, *а* $\alpha(s)$ *произвольная функция. Пусть, кроме того,* $Ind\left(\overline{a+ib}\right)=0$ *и* $\left(\vec{t}\vec{l}\right)<0$. *Тогда существует константа* $C_0>0$, *зависящая* *от поверхности S, края ∂S и векторного поля $\vec{l}$, такая, что при $C_0 \le \max\left|\dfrac{a\cos\alpha}{b\sqrt{K}}\right| < \infty$ поверхность второго порядка с внешней связью (3) является квазикорректной с 3 степенями свободы.*

Доказательство: Краевое условие (3) приводится к виду

$$a\left[-\frac{1}{\sqrt{gK}}\mathrm{Re}\left(\partial_z w+\partial_z \ln\sqrt{K}w\right)\sin\alpha+\left(u_1 l^1+u_2 l^2\right)\cos\alpha\right]-\frac{b}{\sqrt{g}}\mathrm{Re}\left(i\partial_z w\right)=c \qquad (4)$$

где $w=u_1+iu_2$ - комплексная функция изгибания [6, с. 403], l_1, l_2 - координаты вектора $\vec{l}$ в базисе $\bar{r}_\alpha=\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x^\alpha}$, $(\alpha=1,2)$.

Как известно из [6] для поверхностей второго порядка уравнение бесконечно малых изгибаний можно записать в виде:

$$\partial_{\bar{z}} w=0.$$

Обозначим $b(z)=l^1+il^2$, $\lambda(z)=i\sqrt{g}b(z)=i\sqrt{g}(l^1+il^2)$ и выполним замену искомой функции $w(z)=i\omega(z)$. Тогда краевое условие (4) при $c=0$ перепишем в виде

$$\mathrm{Re}\left\{\left(-b\sqrt{K}+a\sin\alpha\, i\right)\partial_z\omega+\left(ia\partial_z \ln\sqrt{K}\sin\alpha+a\overline{\lambda(z)}\sqrt{K}\cos\alpha\right)\omega(z)\right\}=0 \qquad (5).$$

Будем считать, что некоторая внутренняя точка поверхности второго порядка закреплена вместе с касательной плоскостью в ней. Не нарушая общности, можно взять в качестве этой точки точку $z=0$ и поэтому искомая функция $\omega(z)$ должна в точке $z=0$ иметь нуль второго порядка, т.е. $\omega(z)=z^2\omega_1(z)$, где $\omega_1(z)$ – голоморфная в области D функция.

Сделаем замену функции $\omega(z)=\chi(z)\omega_1(z)$, где $\chi(z)$ – аналитическая функция, непрерывная в $D+\partial D$, обращаясь в нуль в начале координат, не равная нулю на границе и удовлетворяющая там краевому условию $\mathrm{Re}\left\{i\overline{\lambda(z)}\chi(z)\right\}=0$.

Решение χ имеет вид $\chi(z)=z\chi^*(z)$, где $\chi^*(z)$ – искомая функция, не обращающаяся в нуль ни в одной точке области и на её границе.

Введём обозначения: $d^2(z) = \mathrm{Re}\{\overline{\lambda(z)}\chi(z)\} \neq 0$, $-\frac{a\cos\alpha}{b\sqrt{K}} = g^2$, $-\frac{a\sin\alpha}{b\sqrt{K}} = h^2$, $\chi(z) = \chi_1 + i\chi_2$, $z \in \partial D$, $2d_1 = \chi_{1x} + \chi_{2y}$, $2d_2 = \chi_{1y} - \chi_{2x}$, $\omega_1(z) = U + iV$, где $U(z), V(z)$ – гармонические функции, тогда имеем $\Delta U = 0$, $U(0,0) = V(0,0) = 0$ при $z = x + iy = 0$.

При этих обозначениях краевое условие (5) приводится к виду:

$$a^{(l_0)}\frac{\partial U}{\partial \vec{l}_0} + g^2 d^2(z)\sqrt{K}U + d_1 U + d_2 V - h^2 a^{(l_0)}\frac{\partial V}{\partial \vec{l}_0} - h^2 d_1 V + h^2 d_2 U - \\ - h^2 \partial_z \ln\sqrt{K}\left(\chi_2 U + \chi_1 V\right) = 0$$

Полученная краевая задача

$$\begin{cases} \Delta U = 0, \quad U(0,0) = V(0,0) = 0 \\ a^{(l_0)}\frac{\partial U}{\partial \vec{l}_0} + g^2 d^2(z)\sqrt{K}U + d_1 U + d_2 V - h^2 a^{(l_0)}\frac{\partial V}{\partial \vec{l}_0} - h^2 d_1 V + h^2 d_2 U - \\ - h^2 \partial_z \ln\sqrt{K}\left(\chi_2 U + \chi_1 V\right) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

имеет только нулевое решение. Тогда с помощью преобразования $\omega_1(z) = U + iV$ имеем $\omega_1 = 0$ в $D + \partial D$. Значит, задача

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}}\omega(z) = 0, \omega(0) = 0, z \in D, \\ \mathrm{Re}\left\{\left(-b\sqrt{K} + a\sin\alpha\, i\right)\partial_z \omega + \left(ia\partial_z \ln\sqrt{K}\sin\alpha + a\overline{\lambda(z)}\sqrt{K}\cos\alpha\right)\omega(z)\right\} = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение.

Таким образом, можно утверждать, что существует константа C_0, зависящая от поверхности S, края ∂S и векторного поля $\vec{l}$, такая, что при $C_0 \le \max\left|\frac{a\cos\alpha}{b\sqrt{K}}\right| < \infty$ поверхность второго порядка с условием (4) является жёсткой.

Литература:

1. В.Т.Фоменко. О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний. СМЖ. 1974. Т.15. №1. С.152-161.

2. В.Т.Фоменко. О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей. ДАН. 1973. Т.212. №6. С.1305-1308.

3. Казак В.В. Исследование условия обобщённого скольжения в теории бесконечно малых изгибаний: дисс. канд. физ. – мат. наук. Ростов – на – Дону, 1973 – 98 с.

4. Данилюк, И.И. О задаче с наклонной производной. // СМЖ. Том 3, №1. 1962. – С. 18 – 55.

5. Сабитов, И.Х. Бесконечно малые изгибания выпуклых поверхностей с краевым условием обобщённого скольжения // ДАН СССР. – 1962. – 147, №4. – С.793 – 796 (РЖМат, 1964, 10А419).

6.Векуа, И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматлит, 1959 – 509 с.

7. Nitsche Joachim. Beitrage zur Verbiegung zweifach zuaamtnenhangender Flachenstucke // Math. Z. – 1955. – 62, № 4. – P. 388 – 399.

8. Grotemeyer K. P. Einige Probleme und Methoden der Flachentheorie im Grossen // Math.-phys. Semesterber. – 1964. – 10, № 2. – P.187 – 201.

9. Онишкова, А.М. Численное решение задачи для плоской области со свободной границей [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4 (часть 1). – Режим доступа: http: // ivdon.ru /magazine/ archive/ n4p1y2012/ 1205 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

10. Замятин, А.В., Замятина, Е.А. Алгоритм построения развёртки поверхностей [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4 (часть 2). – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1233 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.