Расчёт компонентов хеджирующего портфеля на неполных рынках с недетерминированным поведением скупщиков акций

И.В.Павлов, И.В.Цветкова, В.В.Шамраева

1. *Моделирование случайного поведения бесконечного числа агрессивных скупщиков акций на финансовом рынке.*

Итак, пусть на финансовом рынке действует бесконечное число скупщиков акций. Так как предполагается, что купленные акции долгое время находятся на руках и не возвращаются на рынок, поэтому назовём скупщиков - *агрессивными*. Порядок их доступа на финансовый рынок реализуем в виде вектора $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \delta^{(3)}, ..)$, координаты которого — зависимые случайные величины и определяются по следующей схеме: разделим отрезок $[0,1]$ на бесконечное число непересекающихся отрезков. Длины таких отрезков обозначим через d_1, d_2, d_3, … , при этом $\sum_{i=1}^{\infty} d_i = 1$. Производим серию из бесконечного числа испытаний, каждое из которых заключается в бросании точки на отрезок [0,1]. Предположим, что при первом броске точка попала на отрезок $\lfloor d_{k_1-1}, d_{k_1-1} + d_{k_1} \rfloor, k_1 \in \{1,2,3,...\}$, ($d_0 = 0$).Тогда $H_{k_1} = \{\delta^{(1)} = k_1\}$-случайное событие, которое означает, что первым на рынок попадёт скупщик с номером k_1. Вероятность этого события равна мере Лебега по отрезку $\lfloor d_{k_1-1}, d_{k_1-1} + d_{k_1} \rfloor$: $P(H_{k_1}) = d_{k_1}$. После того как точка попала на отрезок $\lfloor d_{k_1-1}, d_{k_1-1} + d_{k_1} \rfloor$, этот отрезок удаляется с $[0,1]$, а длины оставшихся отрезков пропорционально увеличиваются так, чтобы выполнялось условие $\sum_{i \in \Delta}^{\infty} d_i = 1$, где множество Δ состоит из номеров оставшихся отрезков. Рассмотрим гипотезы $H_{k_j} = \{\delta^{(j)} = k_j\}, k_j \in \{1,2,3...\} \setminus \{k_1, k_2, k_3, ..., k_{j-1}\}$, $j = 2,3,4,.....$

В результате равномерного перераспределения вероятностей, получим:

$$P\left(H_{k_2}\middle|H_{k_1}\right)=\frac{d_{k_2}}{1-d_{k_1}},\ k_2\neq k_1. \tag{1}$$

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P\left(H_{k_2}\right)=\sum_{k_1=1}^{\infty}P\left(H_{k_2}\middle|H_{k_1}\right)\cdot P\left(H_{k_1}\right)=d_{k_2}\left(\sum_{\substack{k_1=1\\k_1\neq k_2}}^{\infty}\frac{d_{k_1}}{1-d_{k_1}}\right). \tag{2}$$

Совместное распределение для первых двух координат вектора δ:

$$P\left(H_{k_1,k_2}\right)=P\left(H_{k_1}\cdot H_{k_2}\right)=P\left(H_{k_1}\right)\cdot P\left(H_{k_2}\middle|H_{k_1}\right)=d_{k_1}\cdot\frac{d_{k_2}}{1-d_{k_1}}.$$

Продолжая этот процесс по индукции, получим совместное распределение для первых $n-1$ координат вектора δ:

$$P\left(H_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}}\right)=\frac{d_{k_1}\cdot d_{k_2}\cdot\ldots\cdot d_{k_{n-1}}}{\left(1-d_{k_1}\right)\left(1-d_{k_1}-d_{k_2}\right)\ldots\left(1-\sum_{i=1}^{n-2}d_{k_i}\right)}, \tag{3}$$

$$P\left(H_{k_n}\middle|H_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_{n-1}}\right)=\frac{d_{k_n}}{1-d_{k_1}-d_{k_2}-d_{k_3}-\ldots-d_{k_{n-1}}},\ k_1\neq k_2\neq\ldots\neq k_n$$

Тогда

$$P\left(H_{k_n}\right)=d_{k_n}\sum_{\substack{k_1=1\\k_1\neq k_n}}^{\infty}\sum_{\substack{k_2=1\\k_2\neq k_j\\j=1,n}}^{\infty}\sum_{\substack{k_3=1\\k_3\neq k_j\\j=1,2,n}}^{\infty}\ldots\sum_{\substack{k_{n-1}=1\\k_{n-1}\neq k_j\\j=1,2,3,\dots,n-2,n}}^{\infty}\frac{d_{k_1}\cdot d_{k_2}\cdot\ldots\cdot d_{k_{n-1}}}{\left(1-d_{k_1}\right)\left(1-d_{k_1}-d_{k_2}\right)\ldots\left(1-\sum_{i=1}^{n-2}d_{k_i}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}d_{k_i}\right)}$$

Ясно, что $P\left(H_{k_1,k_2,\dots,k_n,\dots}\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(H_{k_1,k_2,\dots,k_n}\right)$ P-почти наверное (см.[2]).

2. *Процедура хеджирования платёжного обязательства (п.о.). Вычисление компонент самофинансируемого портфеля*.

Предположим теперь, что порядок попадания скупщиков акций на одношаговый безарбитражный (B,S)-рынок случаен. Основные теоремы финансовой математики устанавливают связь между экономическими состояниями финансового рынка, наличием и единственностью мартингальной меры ([3],[4],[8]). Преобразование неполного рынка в полный осуществляется с помощью метода интерполяции, развитого в работах [5].

Введём обозначения: Ω-счётное пространство элементарных событий, $\boldsymbol{F}=(F_0,F_1)$ — одношаговая фильтрация, причём $F_0=\{\Omega,\varnothing\}$, а F_1 — σ-алгебра, порожденная разбиением Ω на счетное число атомов $A_{\delta(i)}$ A_i,

i=1,2,…. Рассмотрим F -адаптированный случайный процесс $Z=(Z_k,\mathrm{F}_k)_{k=0}^{1}$, понимаемый как дисконтированная стоимость акции. Будем предполагать, что $Z_0=a,\ Z_1(A_{\delta^{(i)}})=b_{\delta^{(i)}},\ i\in N$ тогда условием гарантирующим безарбитражность и неполноту исходного финансового рынка является: $\inf\limits_i b_{\delta^{(i)}}<a<\sup\limits_i b_{\delta^{(i)}}$ (см. [6]). Пусть $\mathbf{P}(Z,\mathrm{F})$- множество невырожденных мартингальных мер этого рынка.

Рассмотрим специальную хааровскую фильтрацию:

$\mathrm{H}=(\mathbf{H}_n)_{n=0}^{\infty}$, где $\mathrm{H}_0=\mathrm{F}_0$, $\mathrm{H}_1=\sigma\{A_{\delta^{(1)}},B_{1,\delta^{(1)}}\}$, $\mathrm{H}_2=\sigma\{A_{\delta^{(1)}},A_{\delta^{(2)}},B_{2,\delta^{(2)}}\},\ldots,$

$$\mathrm{H}_\infty=\bigvee_{n=0}^{\infty}\mathrm{H}_n=\mathrm{F}\ .$$

Таким образом, такая фильтрация H интерполирует фильтрацию F . Однако интерполирование можно вести только при наличии вероятностной меры, обладающей ослабленным свойством универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ) (общее определение этого свойства можно найти в [6]).Будем предполагать, что мера $P\in\mathbf{P}(Z,\mathrm{F})$ удовлетворяет ОСУХЕ, (например выполнены условия одного из предложений изложенных в [1] для рынков с бесконечным числом состояний). Интерполяция процесса Z представляет собой:

$$Y_n=E^P\left[Z_1\middle|\mathbf{H}_n\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P(A_{\delta^{(k)}})}E^p\left[Z_1\cdot I_{A_{\delta^{(k)}}}\right]\cdot I_{A_{\delta^{(k)}}}+\frac{1}{P(B_{n,\delta^{(n)}})}E^p\left[Z_1\cdot I_{B_n,\delta^{(n)}}\right]\cdot I_{B_n,\delta^{(n)}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P(A_{\delta^{(k)}})}\sum_{i=1}^{\infty}b_{\delta^{(i)}}P\left(A_{\delta^{(i)}}\cdot A_{\delta^{(k)}}\right)\cdot I_{A_{\delta^{(k)}}}+\frac{1}{P(B_{n,\delta^{(n)}})}\sum_{i=1}^{\infty}b_{\delta^{(i)}}P\left(A_{\delta^{(i)}}\cdot B_{n,\delta^{(n)}}\right)\cdot I_{B_{n,\delta^{(n)}}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P(A_{\delta^{(k)}})}b_{\delta^{(k)}}P\left(A_{\delta^{(k)}}\right)\cdot I_{A_{\delta^{(k)}}}+\frac{1}{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}P\left(A_{\delta^{(k)}}\right)}\sum_{k=n+1}^{\infty}b_{\delta^{(k)}}P\left(A_{\delta^{(k)}}\right)\cdot I_{B_n,\delta^{(n)}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}b_{\delta^{(k)}}\cdot I_{A_{\delta^{(k)}}}+\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}b_{\delta^{(k)}}p_{\delta^{(k)}}}{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}p_{\delta^{(k)}}}\cdot I_{B_n,\delta^{(n)}}\ .$$

Таким образом: $Y_n=\sum_{k=1}^{n} b_{\delta^{(k)}}\cdot I_{A_{\delta^{(k)}}}+\hat{b}_{\delta^{(n)}}\cdot I_{B_n,\delta^{(n)}}$

Образуем случайные величины:

$f=\sum_{i=1}^{\infty} c_{\delta^{(i)}} I_{A_{\delta^{(i)}}}$ — ограниченное платёжное обязательство,

$$X_n=E^P\left[f\middle|\mathrm{H}_n\right]=\sum_{k=1}^{n} c_{\delta^{(k)}}\cdot I_{A_{\delta^{(k)}}}+\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_{\delta^{(k)}} p_{\delta^{(k)}}}{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_{\delta^{(k)}}}\cdot I_{B_{n,\delta^{(n)}}}=\sum_{k=1}^{n} c_{\delta^{(k)}}\cdot I_{A_{\delta^{(k)}}}+\hat{c}_{\delta^{(n)}}\cdot I_{B_{n,\delta^{(n)}}}$$

—полный капитал некоторого самофинансируемого портфеля $\pi=(\beta_n,\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$.

Проделав схему рассуждений, представленную в [7], получаем компоненты самофинансируемого портфеля:

$$\begin{cases}\gamma_n^{\delta^{(k)}}=0, \quad k=1,2,3,\dots,\mathrm{n}-1.\\ \gamma_n^n=\dfrac{c_{\delta^{(n)}}-\hat{c}_{\delta^{(n-1)}}}{b_{\delta^{(n)}}-\hat{b}_{\delta^{(n-1)}}}=\dfrac{\hat{c}_{\delta^{(n)}}-\hat{c}_{\delta^{(n-1)}}}{b_{\delta^{(n)}}-\hat{b}_{\delta^{(n-1)}}}, \quad n=1,2,3,\dots\end{cases} \qquad \begin{cases}\beta_n^{\delta^{(k)}}=c_{\delta^{(k)}}, \quad k=1,2,\dots,n-1,\ n\geq 2\\ \beta_n^{\delta^{(n)}}=c_{\delta^{(n)}}-\gamma_n^{\delta^{(n)}}, \quad n=1,2,3,\dots\\ \beta_n^n=\hat{c}_{\delta^{(n)}}-\gamma_n^{\delta^{(n)}}\hat{b}_{\delta^{(n)}}.\end{cases}$$

Тогда процесс $X=\left(X_n,\mathrm{H}_n\right)_{n=0}^{\infty}$ является полным капиталом некоторого самофинансируемого портфеля $\pi=\left(\beta_n,\gamma_n\right)_{n=0}^{\infty}$, где $\left(\beta_n\right)_{n=0}^{\infty}$ и $\left(\gamma_n\right)_{n=0}^{\infty}$ предсказуемые относительно H_n последовательности ([8], гл.II, §1b). При этом $\beta_n=\beta_n^n=\beta_n^{n+1}=\dots$, $\gamma_n=\gamma_n^n=\gamma_n^{n+1}=\dots$, $\forall n=1,2,3,\dots$ Выполнение P-п.н. равенства-$\lim_{n\to\infty} X_n=f$ означает реплицирование п.о. f и полноту интерполирующего рынка Y. Последнее вытекает из общей теоремы 1.17 в [2].

Построение хеджирующих стратегий имеет большое значение в инвестиционной политике ([9,10]), так как позволяет прогнозировать поведение хеджеров и реплицировать любое финансовое обязательство *f*, заданное на исходном (B,S)-рынке.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 13-01-00637.

Литература:

1. Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В. Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров. // Вестник РГУПС, 2012, №3, с.177-181.

2. Ширяев А.Н., Чёрный А.С. Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража. // Труды математического института им. В.А.Стеклова РАН, 2002, т.237, с.7-11.

3. Follmer H., Schied A. Stohastic Finance. An introduction in Discrete Time. //Berlin: de Gruyter, 2002, P.422-435.

4. F. Delbaen1, W. Schachermayer The fundamental theorem of asset pricing forunbounded stochastic processes, // Mathematische Annalen ,c Springer-Verlag 1998./ Math. Ann. 312, P.215–250.

5. Богачёва М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков, до безарбитражных и полных.//Известия вузов. Северо- Кавказский регион. Естеств. Науки, 2002, №3, с.16-24.

6. Данекянц А.Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счётном вероятностном пространстве. //дис. канд. физ.-мат.. наук: 05.13.18: защищена 26.01.2006 : утв. 23.06.2006, г.Ростов-на-Дону, 2006,144с.

7. Цветкова И.В., Шамраева В.В. Расчёт компонентов хеджирующего портфеля с помощью процедуры хааровской интерполяции. [Электронный ресурс] // «Науковедение»: №3 (16) ,2013- Режим доступа http://naukovedenie.ru/PDF/45trgsu313.pdf (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

8. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. // Том 1. Факты. Модели. М: ФАЗИС, 1998. 512 с.

9. Красий Н.П. О вычислении спрэда для обобщённой модели (B,S)-рынка в случае скупки акций. [Электронный ресурс] //«Инженерный вестник Дона»№4(часть2),2012- Режим доступа:

http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1378 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

10. Пучков Е.В. Разработка системы поддержки принятия решений для управления кредитными рисками банка. [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона» №1,2011- Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/377 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.