Деформированные мартингалы и их свойства

О.В. Назарько, И.В. Павлов

Настоящая работа посвящена изучению некоторых основополагающих свойств деформированных мартингалов 1-го и 2-го рода. Актуальность научного направления, в рамках которого выполнена работа, подробно обоснована во введении статьи [1], которая посвящена моделированию деформаций (см. также работы [2–3]). Приложения данной тематики продемонстрированы, например, в работах [4–5].

Пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ — фильтрованное пространство с дискретным временем, где Ω — произвольное множество, а $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр на нем (фильтрация). Для удобства мы введем также $\mathcal{F}_{-1} = \{\Omega, \varnothing\}$. Рассмотрим семейство $\mathbf{Q} = \left(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n\right)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathcal{F}_n$. Семейство $\mathbf{Q}$ называется деформацией 1-го рода (D1), если при всех $n \in N = \{0,1,2,\ldots\}$ выполняется соотношение абсолютной непрерывности $Q^{(n+1)}\big|_{\mathcal{F}_n} << Q^{(n)}$, и деформацией 2-го рода (D2), если выполняются обратные соотношения. Если выполняются и те, и другие соотношения, то деформация $\mathbf{Q}$ называется слабой (WD). D1 (соотв., D2) называется ограниченной — BD1 (соотв., BD2), если $\forall n \in N$ $\left|\frac{dQ^{(n+1)}\big|_{\mathcal{F}_n}}{dQ^{(n)}}\right| \le c_n < \infty$ $Q^{(n)}$-п.н. (соотв., $\left|\frac{dQ^{(n)}}{dQ^{(n+1)}\big|_{\mathcal{F}_n}}\right| \le c^{(n)} < \infty$ $Q^{(n+1)}\big|_{\mathcal{F}_n}$-п.н.). Основные свойства деформаций подробно изучены в [6].

Предположим, что при всех $n \in N$ случайные величины (с.в.) Z_n интегрируемы по мере $Q^{(n)}$.

Определение 1. 1) Пусть $\mathbf{Q}$ – D1. Процесс $Z = \left(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ будем называть деформированным мартингалом первого рода (DM1), если $\forall n \in N$ справедливо равенство

$$E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] = Z_n \quad Q^{(n+1)}\big|_{\mathcal{F}_n}\text{-п.н.} \tag{1}$$

2) Если $\mathbf{Q}$ есть D2, то процесс $Z=\left(Z_n,\mathsf{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ будем называть деформированным мартингалом 2-го рода (DM2) при выполнении $\forall n\in N$ равенства

$$E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right]=Z_n \quad Q^{(n)}\text{-п.н.} \tag{2}$$

3) Предположим, что $\mathbf{Q}$ есть WD. Если процесс $Z=\left(Z_n,\mathsf{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ является одновременно DM1 и DM2, то его будем называть слабо деформированным мартингалом (WDM).

Замечание 1. 1) Предположим, что f и g являются представителями условного матожидания в равенстве (1). Ясно, что $Q^{(n+1)}\{f\neq g\}=0$, однако $Q^{(n)}\{f\neq g\}$ может не равняться нулю. Поэтому некорректно требовать выполнение равенства (1) $Q^{(n)}$-п.н. Покажем корректность формулы (1). Если процесс Z $\mathbf{Q}$-неотличим от процесса $Z'=\left(Z'_n,\mathsf{F}_n\right)_{n=0}^{\infty}$, то для всех $n\geq -1$ $Z_{n+1}=Z'_{n+1}$ $Q^{(n+1)}$-п.н. Известно, что $E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n++1}\middle|\mathsf{F}_n\right]=E^{Q^{(n+1)}}\left[Z'_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right]$ $Q^{(n+1)}\Big|_{\mathsf{F}_n}$-п.н. Также $Z_n=Z'_n$ $Q^{(n)}$-п.н. $\Rightarrow$ $Z_n=Z'_n$ $Q^{(n+1)}\Big|_{\mathsf{F}_n}$-п.н. Из всего этого вытекает, что $E^{Q^{(n+1)}}\left[Z'_{n++1}\middle|\mathsf{F}_n\right]=Z'_n$ $Q^{(n+1)}\Big|_{\mathsf{F}_n}$-п.н. Аналогичным образом обосновывается корректность формулы (2). Примеры деформированных мартингалов можно найти в [7].

Предложение 1. 1) Если Z есть DM1, то $\forall n\in N$

$$E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}\right]=E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_n\right]$$

2) Если Z есть DM2, то $\forall n\in N$

$$E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}\cdot h^{(n)}\right]=E^{Q^{(n)}}\left[Z_n\right]$$

Доказательство тривиально.

Определение 2. Процесс $Z=\left(Z_n,\mathsf{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ называется деформированным субмартингалом 1-го рода – DSubM1 (соотв., деформированным супермартингалом 1-го рода – DSupM1), если в формуле

(1) знак “≥” поставить вместо знака “=” (соотв., знак “≤” поставить вместо знака “=”). По тому же принципу определяются деформированные субмартингалы и супермартингалы 2-го рода и слабо деформированные суб- и супермартингалы (DSubM2, DSupM2, SDSubM, SDSupM).

Предложение 2 (телескопическое свойство). Пусть **Q** есть D2 (соотв., BD2), а случайный процесс $Z=\left(Z_n,\mathrm{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ таков, что $\forall n\in N$ $Z\in L_\infty\left(\Omega,\mathrm{F}_n,Q^{(n)}\right)$ (соотв., $Z\in L_1\left(\Omega,\mathrm{F}_n,Q^{(n)}\right)$). Этот процесс является DM2 (соотв., DSubM2, DSupM2) если и только если $\forall k,n\in N,k<n$ справедливо равенство

$$E_k^n Z_n = Z_k \quad Q^{(k)}\text{-п.н.}$$

(соотв., равенство

$$E_k^n Z_n \geq Z_k \quad Q^{(k)}\text{-п.н.}$$

и

$$E_k^n Z_n \leq Z_k \quad Q^{(k)}\text{-п.н.}$$

Доказательство опускается.

Предложение 3. Пусть $Z=\left(Z_n,\mathrm{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ – DSubM1 (соотв. DSubM2). Этот процесс является DM1 (соотв., DM2) в том и только в том случае, когда $\forall n\in N$

$$E^{Q^{(n+1)}}\left(Z_{n+1}\right)=E^{Q^{(n+1)}}\left(Z_n\right)$$

(соотв.,

$$E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}h^{(n)}\right]=E^{Q^{(n)}}\left[Z_n\right]).$$

Доказательство опускается.

Предложение 4. Пусть $\left(Z_n^{(\alpha)},\mathrm{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ – некоторое семейство, состоящее из DSupM1 (соотв., DSupM2), где α — параметр. Определим $Z_n := ess\,\mathbf{inf}_{\alpha}\, Z_n^{(\alpha)}\in L_1\left(\Omega,\mathrm{F}_n,Q^{(n)}\right)$, $\forall n\in N$. Тогда процесс $\left(Z_n,\mathrm{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ есть DSupM1 (соотв., DSupM2).

Доказательство. Имеем $\forall n\in N$:

$$E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right]=E^{Q^{(n+1)}}\left[ess\inf_{\alpha} Z_{n+1}^{(\alpha)}\middle|\mathsf{F}_n\right]\le ess\inf_{\alpha} E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}^{(\alpha)}\middle|\mathsf{F}_n\right]\le ess\inf_{\alpha} Z_n^{\alpha}=Z_n .$$

Нетрудно проверить, что если деформация **Q** есть D1 (то есть речь идет о DSupM1), то записанные равенства и неравенства понимаются $Q^{(n+1)}\big|_{\mathsf{F}_n}$ -п.н. Если же деформация **Q** есть D2 (то есть речь идет о DSupM2), то эту цепочку соотношений можно понимать $Q^{(n)}$-п.н., что и требовалось доказать.

Предложение 5. Если $Z=\left(Z_n,\mathsf{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ есть деформированный мартингал 1-го или 2-го рода (соответственно, деформированный субмартингал 1-го или 2-го рода), а φ – выпуклая (соответственно, выпуклая возрастающая) функция на R^1, удовлетворяющая условию $\varphi\circ Z_n\in L_1\left(\Omega,\mathsf{F}_n,Q^{(n)}\right)$, $n\in N$, то процесс $\left(\varphi\circ Z_n,\mathsf{F}_n,Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ – деформированный субмартингал того же рода, что и Z.

Доказательство. Обозначим $Y_n := \varphi\circ Z_n$. Если Z – DM, то

$$Y_n=\varphi\circ Z_n=\varphi\circ E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right].$$

Если Z – DSubM, то $Y_n=\varphi\circ Z_n\le\varphi\circ E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right]$ в силу монотонного возрастания функции φ. В обоих случаях $Y_n\le\varphi\circ E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right]$. Применяя неравенство Йенсена, получаем $\forall n\in N$:

$$Y_n\le\varphi\circ E^{Q^{(n+1)}}\left[Z_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right]\le E^{Q^{(n+1)}}\left[\varphi\circ Z_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right]=E^{Q^{(n+1)}}\left[Y_{n+1}\middle|\mathsf{F}_n\right].$$

Легко видеть, что если Q – D1 и Z – DM1 (соотв., DSubM1), то все записанные в этом доказательстве соотношения можно понимать $Q^{(n+1)}\big|_{\mathsf{F}_n}$ -п.н. Если же Q – D2 и Z – DM2 (соотв., DSubM2), то все соотношения можно понимать $Q^{(n)}$-п.н. Доказательство закончено.

В заключение отметим, что классические варианты доказанных в данной работе результатов можно найти в [8-9]. Применение метода хааровских интерполяций к деформированным финансовым рынкам продемонстрировано в [10].

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-01-00637а.

Литература:

1. Назарько О.В., Павлов И.В. Рекуррентный метод построения слабых деформаций по процессу плотностей в рамках модели стохастического базиса, снабженного специальной хааровской фильтрацией [Текст] // Вестник РГУПС, 2012. – №1. – С. 200–208.
2. Назарько О.В. (B,S)-рынки на деформированных стохастических базисах [Текст] // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2008. – Вып. 3. – С. 19–21.
3. Назарько О.В. Слабые деформации на бинарных финансовых рынках [Текст] // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2010. – Вып. 1. – С. 12–18.
4. Назарько О.В., Павлов И.В., Чернов А.В. Моделирование оптимальной полосы пропускания телекоммуникационных каналов при условии гарантированной и негарантированной доставки пакетов [Электронный ресурс] // «Инженерный Вестник Дона», 2012, №1. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/652 (доступ свободный). – Загл. с экрана. – Яз. рус.
5. Красий Н.П. О вычислении спрэда для обобщённой модели (B,S)-рынка в случае скупки акций [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4 (часть 2). – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1378 (доступ свободный). – Загл. с экрана. – Яз. рус.
6. Назарько О.В., Павлов И.В., Чернов А.В. Деформации и деформированные стохастические базисы [Текст]// В сб.: «Математические методы в современных и классических моделях экономики и естествознания: материалы региональной научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава и молодых ученых РГЭУ (РИНХ)», 2012. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный экономический университет (РИНХ). – С. 37–53.
7. Назарько О.В., Павлов И.В. Два «классических» примера деформированных мартингалов 1-го рода [Текст] // Тезисы международной научно-практической конференции «Строительство 2012», 2012. – Ростов-на-Дону, РГСУ.
8. Neveu J. Discrete-Parameter Martingales [Текст] // North-Holland Pub. Company, Amsterdam, 1975. – 236 p.
9. Long R. Martingale Spaces and Inequalities [Текст] // Peking University Press, 1993. – 346 p.
10. Павлов И.В., Назарько О.В. Хааровские интерполяции финансовых рынков на деформированных стохастических базисах (Электронный ресурс) // Тезисы докладов международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование», 2011. – ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Волгодонск. – С. 155-156.