Возникновение конвекции в двухслойной системе жидкости и пористой среды при подогреве снизу

А.А. Селищев

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Исследуется возникновение конвекции в двухслойной системе, состоящей из области свободной жидкости и пористого массива, насыщенного той же жидкостью. Уравнения в приближении Обербека-Буссинеска применяются для описания движения чистой жидкости, а для пористого слоя используются уравнения, основанные на законе Дарси. При помощи схемы смещенных сеток проводится аппроксимация плоской задачи в естественных переменных. На границе раздела применяются специальные формулы, полученные интегро-интерполяционным методом и учитывающие разнотипность уравнений в двух областях. Представлены результаты вычисления критических чисел, отвечающих возникновению конвекции для различных высот пористого слоя и чисел Дарси.

Ключевые слова: конвекция, пористая среда, уравнения Обербека-Буссинеска, модель Дарси, смещенные сетки, устойчивость.

Введение

При моделировании природных явлений (геотермальные системы, выбросы подземных вод) необходимо решать задачи о тепловой конвекции [1,2], в которых требуется учитывать пористость материалов, влияние границ раздела сред и др. Конвективные движения могут происходить в областях, состоящих из нескольких слоев пористых материалов, заполненных жидкостью, поверх которых может располагаться свободная жидкость.

Имеются различные модели движения жидкости в пористых средах, отличающиеся постановкой условий согласования на границах раздела [1]. Одним из подходов является описание конвекции в слое свободной жидкости на основе уравнений Обербека-Буссинеска, а конвекции в пористых слоях с использованием закона Дарси. В этом случае для согласования движений на границе раздела применяются дополнительные эмпирические условия, в частности, условие Джозефа-Биверса [3], которое было получено для однонаправленного течения, параллельного поверхности раздела между свободной жидкостью и пористой средой, насыщенной жидкостью. Условие описывает выравнивание скоростей жидкости в прилегающем к границе раздела пористом материале.

Моделирование с использованием условия Джозефа-Биверса было эффективно применено для анализа неустойчивости состояния механического равновесия и возникновения конвекции в ряде двумерных и трехмерных задач [4-8]. В [4,5] проанализирована устойчивость механического равновесия - тепловая конвекция в двухслойной плоской системе (жидкость и насыщенный жидкостью пористый слой) по линейному приближению. Постановка задачи с условием Джозефа-Биверса была применена в [6] для анализа возникновения конвекции в двухслойном параллелепипеде с условиями свободной границы для чистой жидкости. Подход на основе уравнений Обербека-Буссинеска и Дарси был использован в [7,8] для исследования возникновения двумерной конвекции в подогреваемой снизу двухслойной системе под действием вертикальных вибраций.

При моделировании конвекции в пористой среде в [9] был обнаружен удивительный эффект ответвления непрерывного семейства стационарных решений от потерявшего устойчивость механического равновесия. Это явление было объяснено на основе развитой В.И. Юдовичем теории косимметрии [10]. Численное решение задач с косимметрией требует специальных аппроксимаций. В данной работе используется сохраняющий косимметрию метод, описанный в [11, 12].

Математическая модель

Рассматривается прямоугольная область, состоящая из двух слоев. В нижней части располагается заполненная пористая среда, насыщенная жидкостью, сверху – слой свободной жидкости. Движение жидкости описывается системой уравнений в безразмерных переменных, ширина области - a, глубина - b, высота пористого слоя - c (рис. 1).

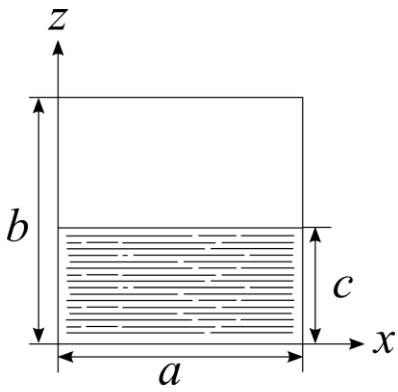

Рис. 1. – Схематичное изображение задачи

Для описания движения вязкой несжимаемой жидкости используется приближение Обербека-Буссинеска [1]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\Delta u\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\Delta w+T\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\Delta T-\lambda w
\end{aligned}\tag{1}$$

Движение жидкости в пористом слое основано на законе Дарси. Предполагается, что конвективными производными в уравнениях движения можно пренебречь [2]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\phi}\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{Da}u\\
&\frac{1}{\phi}\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{Da}w+T\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\Delta T-\lambda w.
\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь u и w – горизонтальная и вертикальные компоненты скорости, соответственно, p – давление, T – температура, ϕ – коэффициент пористости λ, Da – безразмерные коэффициенты Рэлея и Дарси.

В работе применяется метод искусственной сжимаемости, то есть вместо уравнения несжимаемости в системах (1) – (2) используется уравнение:

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (3)$$

На границах области ставятся условия прилипания для свободной жидкости и условия непротекания для насыщенного пористого слоя. Также задаётся линейный по высоте профиль температуры на границе.

Температура, давление, потоки тепла и вертикальная компонента скорости являются непрерывными на границе раздела двух сред. В качестве дополнительного ограничения ставится условие Джозефа-Биверса [3]:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=c}=\frac{\alpha}{\sqrt{Da}}(u_f-u_p),$$

где u_f – скорость в свободной жидкости, устремленной к границе раздела, u_p – скорость в пористом слое, устремленная к границе, α – эмпирический коэффициент. Моделирование с использованием условия Джозефа-Биверса было применено для анализа неустойчивости равновесия и возникновения конвекции в ряде задач [4-7].

Численный метод

Для решения используется метод конечных разностей. В основной области оси x и z разбиваются на n и m отрезков соответственно, после чего применяется метод смещенных сеток, с использованием узлов четырех типов: для двух компонент скорости и давления, как на рис. 2.

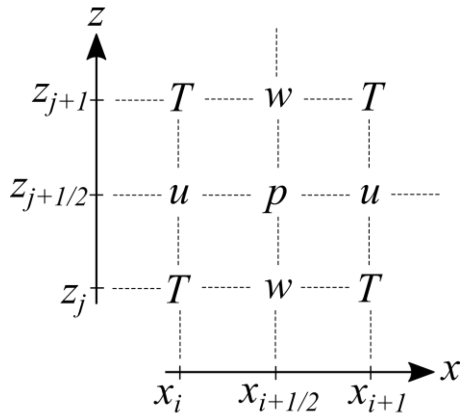

Рис. 2. – Схематичное изображение введенной сетки

Чтобы удовлетворить граничным условиям в слое свободной жидкости, вводятся законтурные узлы для скоростей. На границу раздела двух сред попадает вертикальная компонента скорости *w* и температура *T*. Для того, чтобы граничные условия стали однородными, производится замена, учитывающая линейный профиль температуры *T* при отсутствии конвекции, далее для обозначения отклонения температуры используется переменная θ.

Для аппроксимации систем (1) – (2), вводятся разностные операторы:

$$f_x^{'}(x_{i+1/2}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_x},$$

$$f_z^{'}(z_{i+1/2}) = \frac{f(z_{j+1}) - f(z_j)}{h_z},$$

$$f_{xx}^{"}(x_{i+1/2}) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_{i+1/2}) + f(x_i)}{h_x^2}$$

Используя условие Джозефа-Биверса, вторая производная *u* по *z* в узлах, находящихся вблизи границы раздела, описывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u(z_{j+1/2})}{\partial z^2} = \frac{1}{h_z}\left[u(z_{j+3/2})\left(\frac{1}{h_z} + \frac{\alpha}{2\sqrt{Da}}\right) + u(z_{j+1/2})\left(\frac{1}{h_z} + \frac{\alpha}{\sqrt{Da}}\right) + u(z_{j-1/2})\frac{\alpha}{2\sqrt{Da}}\right]$$

Отметим, что при $\alpha = 2h_z^2\sqrt{Da}$ получается аппроксимация второй производной от *u* по *z* на трёхточечном шаблоне.

Для анализа возникновения конвекции формулируется спектральная задача на основе систем (1) – (2), с учетом (3), где пренебрегаются конвективные члены в уравнениях движения и теплопроводности:

$$\sigma u = -B_1 p + A_1 u$$
$$\sigma w = -B_2 p + A_2 w + C_1 \theta$$
$$-\frac{1}{\gamma}\sigma p = B_3 u + B_4 w$$
$$\sigma\theta = A_3\theta - \lambda C_2 w.$$

Здесь B_1, B_2, B_3, B_4, A_1, A_2, A_3, C_1, C_2 – матрицы, элементы которых определяются при помощи введенных ранее разностных операторов исходя из уравнений (1) – (2). Приравнивая σ к нулю, задача для поиска критических значений числа Рэлея λ примет вид:

$$0 = -B_1 p + A_1 u \tag{4}$$

$$0 = -B_2 p + A_2 w + C_1\theta \tag{5}$$

$$0 = B_3 u + B_4 w \tag{6}$$

$$0 = A_3\theta - \lambda C_2 w \tag{7}$$

Выразив u и w из уравнений (4) -(5) и подставив в (6), получим:

$$Bp = G_1\theta, \quad B = B_3 A_1^{-1} B_1 + B_4 A_2^{-1} B_2, \quad G_1 = A_2^{-1} C_1.$$

Поскольку давление определяется с точностью до константы, то исключается одна компонента p и соответственно одно уравнение [11]. Из (7) получается спектральная задача для определения критических значений параметра Рэлея:

$$0 = A_3\theta - \lambda(C_2 A_2^{-1} B_2 B^{-1} G_1 + C_2 A_2^{-1} C_1)\theta$$

Результаты расчетов

Разработанная схема позволяет проводить расчеты при различных геометрических параметрах (ширина a и высота b области), числе ячеек по горизонтальной и вертикальной координатам (n, m, m_p, – число ячеек по вертикали для пористого слоя), значениях числа Дарси *Da* и эмпирического коэффициента α. Некоторые результаты вычислений критических значений представлены в таблицах 1, 2.

Таблица № 1

Критические значения параметра Рэлея λ при малой высоте пористого слоя для различных параметров сетки (n, m, m_p) и числа Дарси *Da*

a	b	n	m	m_p	α	Da	λ
0.5	1	11	11	3	5	0.001	37.8366
0.5	1	11	33	9	5	0.001	39.9394
0.5	1	33	33	9	5	0.001	43.3224
0.5	1	11	11	3	5	0.003	98.2149
0.5	1	11	33	9	5	0.003	109.5376
0.5	1	33	33	9	5	0.003	112.6620

Таблица № 2

Критические значения параметра Рэлея λ при большой высоте пористого слоя для различных параметров сетки (n, m, m_p) и коэффициента α

a	b	n	m	m_p	α	Da	λ
0.5	1	11	11	7	5	0.001	92.6584
0.5	1	11	33	21	5	0.001	100.3343
0.5	1	11	11	7	10	0.001	95.4949
0.5	1	11	33	21	10	0.001	101.5617
0.5	1	11	11	7	20	0.001	96.5382
0.5	1	11	33	21	20	0.001	102.1393

На рис.3-4 приведены характерные распределения функции тока и температуры, отвечающие критическим значениям числа Рэлея соответственно, в случае меньшей ($c/b=3/11$) и большей ($c/b=7/11$) высоты пористого слоя. Вычисления проводились при $\alpha=10$, $Da=0.001$. В расчетах была обнаружена зависимость результатов от соотношения эмпирического коэффициента α и шага разностной схемы.

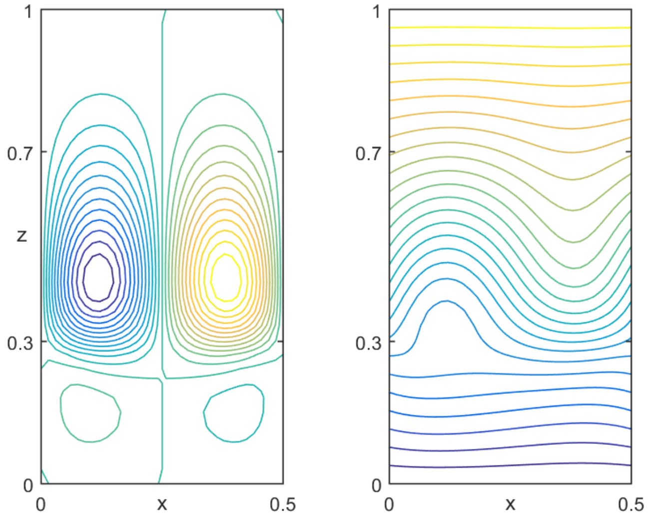

Рис. 3. – Функция тока (слева) и температуры (справа) для *c*/*b*=3/11

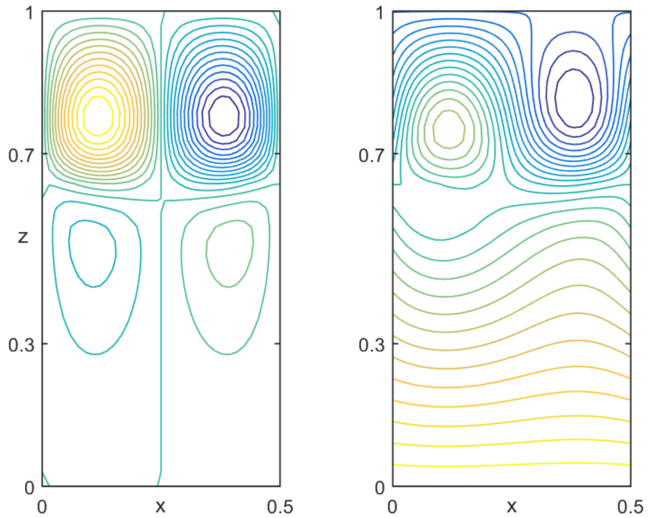

Рис. 4. – Функция тока (слева) и температуры (справа), *c*/*b*=7/11

Литература

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. 320 с.

2. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. – Springer, New York, 2013. 778 p.

3. Beavers G.S., Joseph D.D. Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. pp. 197-207.

4. Hirata S.C., Goyeau B., Gobin D., Carr M., Cotta R.M. Linear stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Influence of the interfacial modelling // Internat J. of Heat and Mass Transfer 2007. Vol. 50. pp. 1356-1367.

5. Le Bars M., Grae Worster M., Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 550. pp. 149-173.

6. Straughan B. Surface-tension-driven convection in a fluid overlying a porous layer // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 170. pp. 320-337.

7. Любимов Д.В., Любимова Т.В., Муратов И.Д., Шишкина Е.А. Влияние вибраций на возникновение конвекции в системе горизонтального слоя чистой жидкости и пористой среды, насыщенной жидкостью // Известия РАН. МЖГ. 2008. № 5. С. 132-143.

8. Kolchanova E., Lyubimov D., Lyubimova T. The onset and nonlinear regimes of convection of two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid // Transp. Porous. Med. – 2013. – Vol. 97, № 1. – pp. 25 – 42.

9. Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131-137.

10. Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 5. С. 142-148.

11. Karasozen B., Tsybulin V.G. Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection // Comp. Phys. Commun. 2005. Vol. 167. pp. 203-213.

12. Абделхафиз М.А., Цибулин В. Г.. Численное моделирование конвективных движений в анизотропной пористой среде и сохранение косимметрии // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017. Т. 57, № 10. С. 154-167.

References

1. Gershuni G.Z., Zhuhovickij E.M., Nepomnjashhij A.A., Ustojchivost' konvektivnyh techenij. [Stability of convective flows]. M.: Nauka, 1989. 320 p.

2. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. Springer, New York, NY, 2013. 778 p.

3. Beavers G.S., Joseph D.D. J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. pp. 197-207.

4. Hirata S.C., Goyeau B., Gobin D., Carr M., Cotta R.M. Internat J. of Heat and Mass Transfer 2007. Vol. 50. pp. 1356-1367.

5. Le Bars M., Grae Worster M. J. Fluid Mech. 2006. Vol. 550. pp. 149-173.

6. Straughan B. Comp. Phys. 2001 Vol. 170. pp. 320-337.

7. Lyubimov, D.V., Lyubimova, T.P., Muratov, I.D., Shishkina, E.A. Izvestiya RAN. MZHG, 2008. Vol. 43, № 5, pp. 789-798.

8. Kolchanova E., Lyubimov D., Lyubimova T. Transp. Porous. Med. 2013. Vol. 97, № 1. pp. 25–42.

9. Lyubimov, D.V. J. PMTF, 1975. Vol. 16, № 2. pp. 257-261.

10. Yudovich, V.I. Mat. zametki, 1991. Vol. 49, № 5. pp. 540-545.

11. Karasozen B., Tsybulin V.G. Comp. Phys. Commun. 2005. Vol. 167. pp. 203-213.

12. Abdelhafez, M.A., Tsybulin, V.G. ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 2017. 57(10), pp. 1706-1719.